Un monde multi-courbe

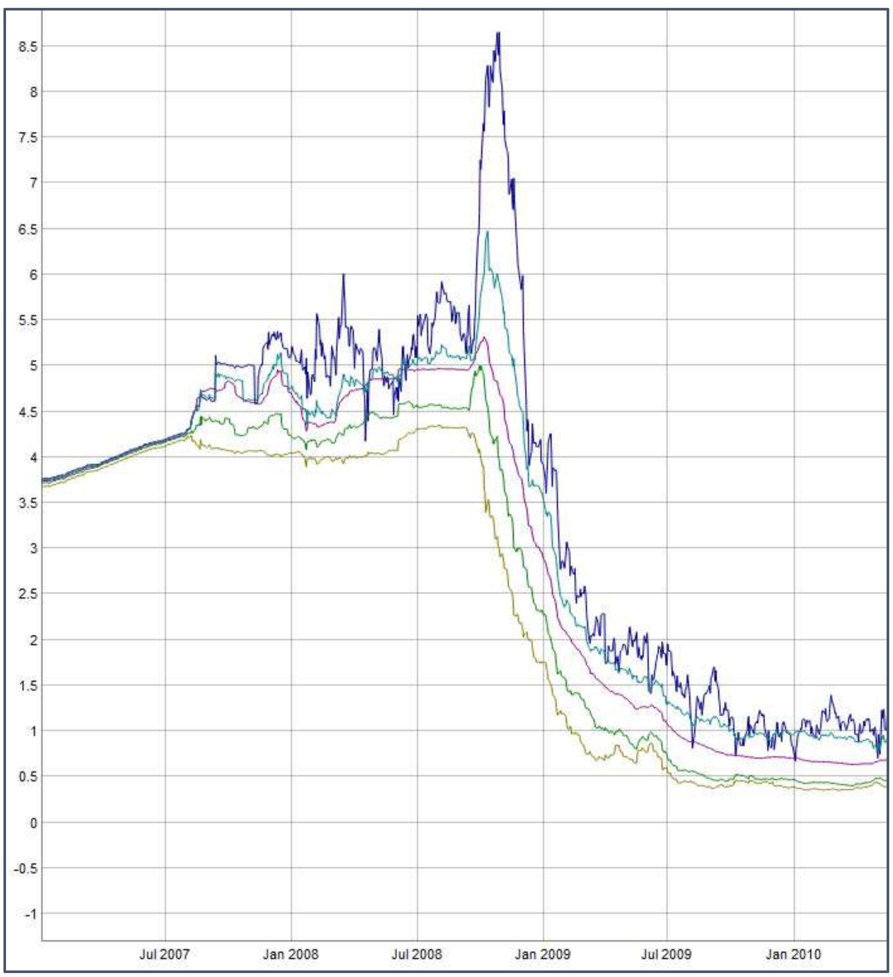


Table des matières

__Attention__ : ce polycopié ne remplace pas les notes de cours, mais les complète.

Introduction - Présentation des quelques taux célèbres par une revisite de la politique monétaire européenne

Mais qui sont les paramètres de Black-Scholes

$$c = e^{-R*T} * \left(S_0 e^{R*T} . \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{F_T}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - K . \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{F_T}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right)$$

Mais qui est R ? Mais qui est σ ?

Une première approche : la volatilité historique

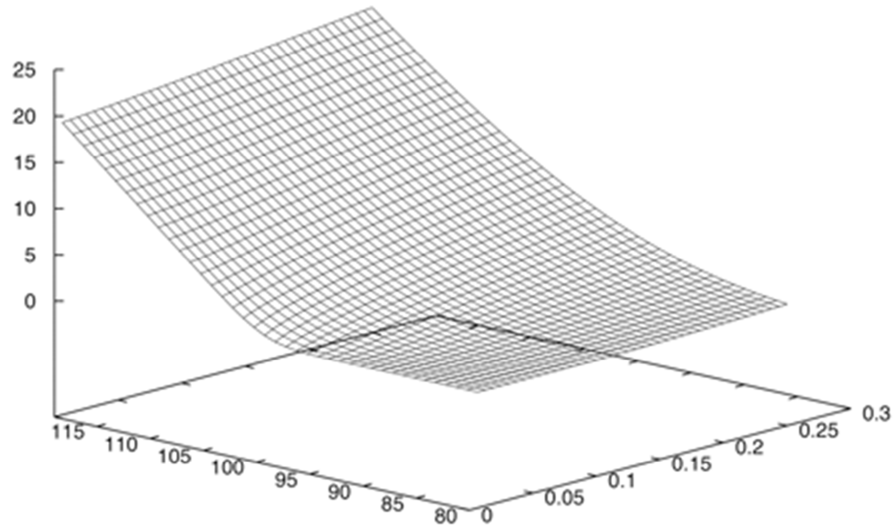
$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^{R_i}$$

$$R_i = \ln\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right)$$

$$\frac{365}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\ln\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) \right)^2$$

Une seconde approche : la volatilité de marché

- ➔ Découverte de la calibration des volatilités à partir des produits les plus liquides du marché
- ➔ Construction de la surface de volatilité
- ➔ Interpolation sur la surface de volatilité



La petite histoire des taux négatifs

Les taux sont à la base des mathématiques financières, nécessaires pour discounter / estimer les flux financiers. Mais pour bien comprendre le fonctionnement de cette mécanique en 2017, il faut revenir à la mission la plus élémentaire de la banque centrale européenne : garantir la stabilité des prix (au sein de la zone euro pour la ECB). Une modélisation naïve de l'évolution du pouvoir d'achat serait le taux directeur réduit du niveau d'inflation. Par exemple si le taux directeur (ECB rate) est de 5% et le taux d'inflation réel est de 6%, l'évolution relative des prix sera une déflation de 1%. En effet si vous prêtez de l'argent à 5% et que la somme perçue dans un an permet d'acheter 6% en moins, vous aurez perdu 1% de pouvoir d'achat.

Les banques centrales combattent activement la déflation, ce qui correspond à une baisse des prix. D'un point de vue du marché, cela correspond à une offre inférieure à la demande, ce qui arrive principalement en période de crise. Or s'il devient plus intéressant de dépenser plus tard qu'aujourd'hui, la demande continue de baisser. On parle alors de spirale déflationniste, et la baisse des prix n'est alors plus lié à la hausse de la productivité ou à la concurrence accrue. Cette déflation est destructrice de commerces et de valeur.

Pourquoi les banques centrales ont un objectif d'inflation de 2% et non de 0% alors ?

- Réduire le poids de la dette étatique
- Combattre les rentes (non-placées)
- Stimuler la consommation (en période normale et en période de crise)

Ce genre de situation est arrivé à maintes reprises de par le passé, comme l'indique Ben Bernanke (ancien directeur de la FED) dans son blog.

Source: Federal Reserve, BLS, and NBER via Haver. Note: Effective fed funds rate minus year-over-year inflation (CPI-U), with recession shading.

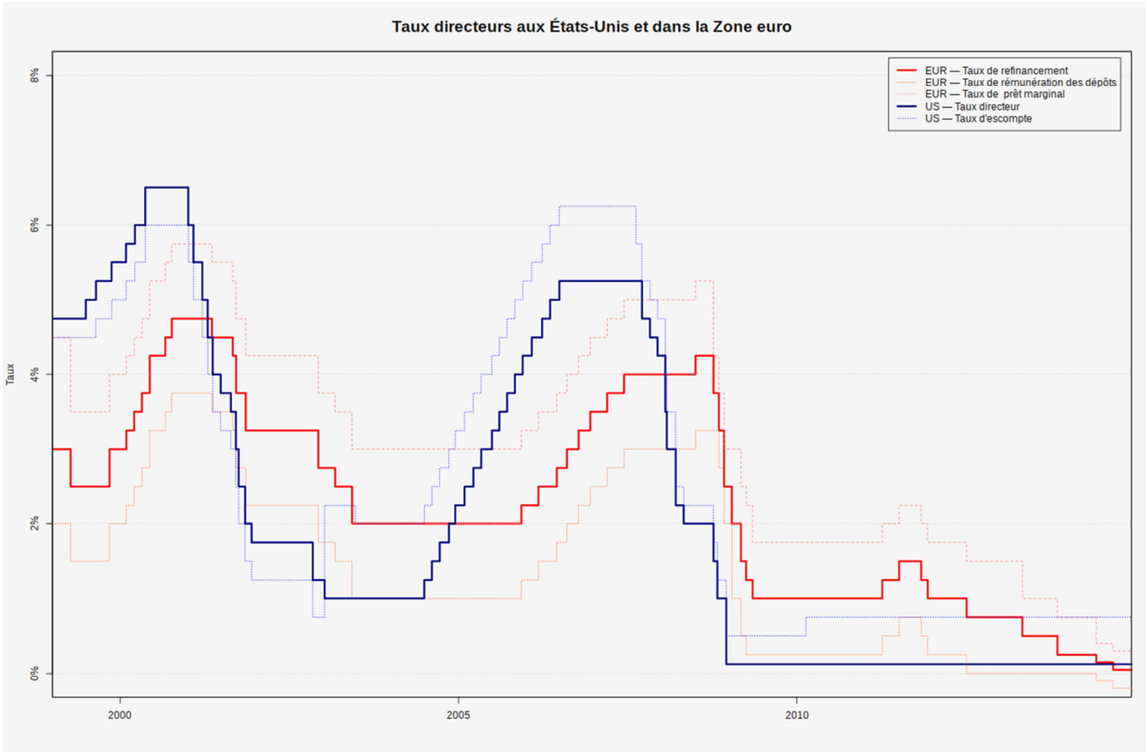
Les banques centrales (dont l'ECB) ajustent ainsi ce ratio autour de 2%, en utilisant principalement trois outils monétaires (d'autres potentiels outils sont discutés dans un autre article de Ben Bernanke) :

Outil #1 : modification du ratio de réserves légales.

Les banques commerciales doivent garder un certain pourcentage des dépôts de leurs clients dans les comptes de la banque centrale. C'est ce qu'on appelle les réserves légales. Par exemple en Europe, le ratio légal des réserves correspond à 1% des dépôts clients. Il est possible de réduire l'inflation en augmentant ce ratio en limitant ainsi la capacité des banques commerciales à prêter de l'argent à leurs clients. S'il est plus difficile d'emprunter pour les clients, cela limite l'investissement et réduit la création de nouvelle monnaie (cf effet multiplicateur de la monnaie). Comme l'Europe craint une période déflationniste, ce ratio a été réduit de 2% à 1% le 1er janvier 2012, afin d'augmenter la quantité d'argent qui peut être créée par les banques commerciales. Cependant cela n'a pas suffi à relancer l'économie et les banques commerciales ont préféré stocker leurs excédents de trésorerie à la banque centrale plutôt que de prêter à des clients aux profils plus risqués.

Outil #2 : modification du taux directeur des banques centrales

Les banques centrales ont également la possibilité de modifier leurs indicateurs clé. Dans la zone euro, il s'agit du taux de dépôt (combien les banques commerciales sont rémunérées pour garder de l'argent dans les coffres de l'ECB et le taux de financement (à combien les banques commerciales peuvent emprunter auprès de l'ECB) ont régulièrement baissés depuis juillet 2011.



Il y a trois types de taux dans les banques centrales :

- Le taux de dépôt, qui indique à combien les banques commerciales sont rémunérées pour laisser dormir leurs excès de liquidité sur les comptes électroniques des banques centrales. Le taux de dépôt est nul depuis juillet 2012, négatif depuis juin 2014 et vaut -0.4% depuis mars 2016.
- Le taux de refinancement (taux MRO, Main Refinancing Operations) vaut actuellement 0%. Lorsqu'une banque a besoin de liquidité, elle peut emprunter directement à la BCE. Ainsi chaque mercredi, les banques de la zone euro peuvent emprunter à ce taux. Cet "emprunt" s'effectue sous la forme d'une "opération de cession temporaire" (en anglais: repurchase operation ou repo), c'est à dire que la banque apporte des actifs en garantie à la BCE, reçoit en échange une certaine somme d'argent, et une semaine plus tard, la banque doit rendre l'argent emprunté à la BCE (majoré des intérêts), et récupère alors ses actifs apportés en garantie. Le fait que la BCE exige des actifs en garantie permet d'éviter les pertes en cas d'impossibilité pour la banque de rembourser son prêt à la fin de la période.

Main Refinancing Operation-Allotment

Reference Number:	20170001
Transaction Type:	REVERSE_TRANSACTION
Operation Type:	LIQUIDITY_PROVIDING
Procedure:	STANDARD_TENDER
Tender Date:	03/01/2017 11:15:00
Time for Submission of Bids:	09:30
Start Date:	04/01/2017
Maturity Date:	11/01/2017
Duration (days):	7
Auction Type:	FIXED_RATE
Fixed Rate:	0 %
% of All. at Fixed Rate:	100
Tot Amount Allotted:	34005.5 mn
Weight. Avg. Allot. Rate:	
Tot Bid Amount:	34005.5 mn
Tot Number of Bidders:	54

- Le taux de prêt marginal (actuellement 0.25%) qui permet de financer des emprunts sur une durée d'un jour en dehors des opérations de refinancement classiques.

Les opérations de financements sont publiques et accessibles depuis le site de l'ECB.

Ainsi les banques commerciales ont plusieurs choix pour investir leurs liquidités : accepter les laisser 'dormir' dans les coffres de la banque centrale et être facturés, transformer la monnaie électronique en monnaie fiduciaire, mais les couts de stockage sont trop importants et risqués (on parle de milliards). L'argent peut également être prêté aux autres banques. Le taux moyen auquel les banques se prêtent de l'argent est appelé le taux EONIA en zone euro ou FED FUNDS aux USA :

L'EONIA (*Euro OverNight Index Average*) est le taux de référence quotidien des dépôts interbancaires en blanc (c'est-à-dire non collatéralisés) effectués au jour-le-jour dans la zone euro. Il s'agit de la moyenne, pondérée par les montants, des taux effectivement traités sur le marché monétaire interbancaire de l'euro pendant la journée par un large échantillon de grandes banques, pour les dépôts/prêts jusqu'au lendemain ouvré. C'est l'un des deux taux de référence du marché monétaire de la zone euro, avec l'Euribor, qui couvre les durées allant d'une semaine à un an (cf plus loin dans le cours).

Le taux *Federal Funds Rate* (aka Fed-Fund) est son alter-ego américain. La Reserve Fédérale favorise les opérations inter-bancaires pour influencer l'offre monétaire de l'économie étatsunienne afin que le taux Fed-Fund réel suive la tendance du taux directeur. Le taux directeur de la FED est determiné à l'issue d'une réunion des membres du FOMC Federal Open Market Committee, 8 fois par ans (environ toutes les 6/7 semaines).

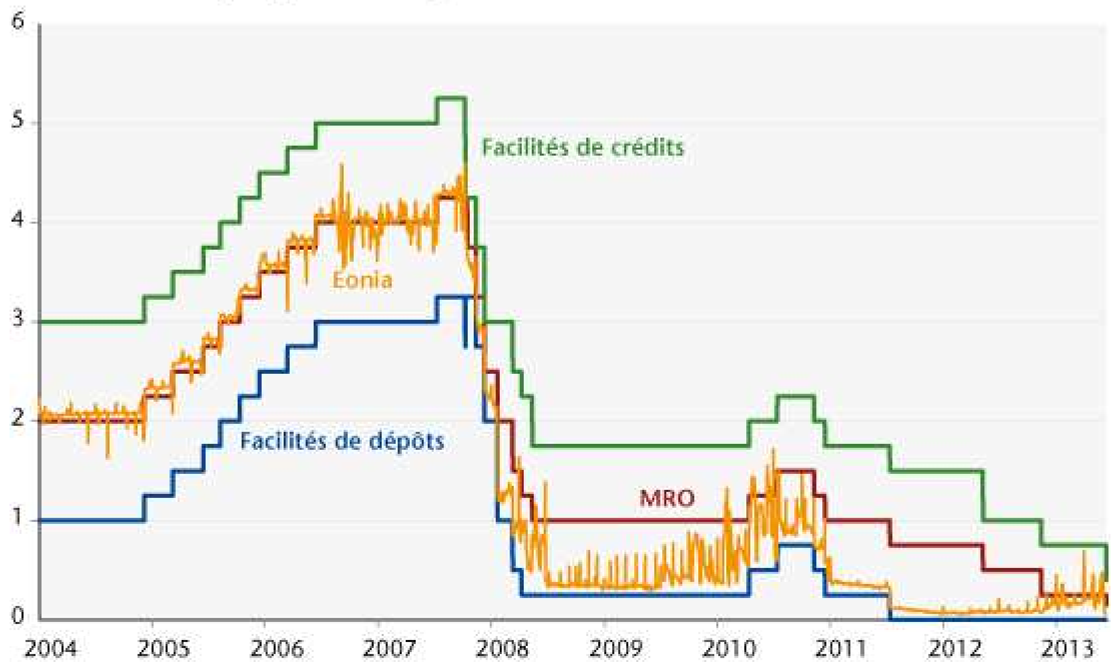
Modern-day meeting of the Federal Open Market Committee at the Eccles Building, Washington, D.C. (source Wikipedia)

Une banque commerciale peut « au pire » emprunter des trésoreries au taux de prêt marginal. De même une banque commerciale peut « au pire » rémunérer ses excèdent de liquidité au taux de dépôt (actuellement négatif). Ainsi les taux OIS sont naturellement compris entre ces deux taux.

$$r_{taux\ légal\ de\ dépot} \leq r_{OIS} \leq r_{taux\ légal\ de\ prêt\ marginal}$$

En général les taux OIS sont assez proches du taux MRO, comme le montre le graphique ci-dessous.

Graphique1 : Principaux taux de la BCE et taux Eonia



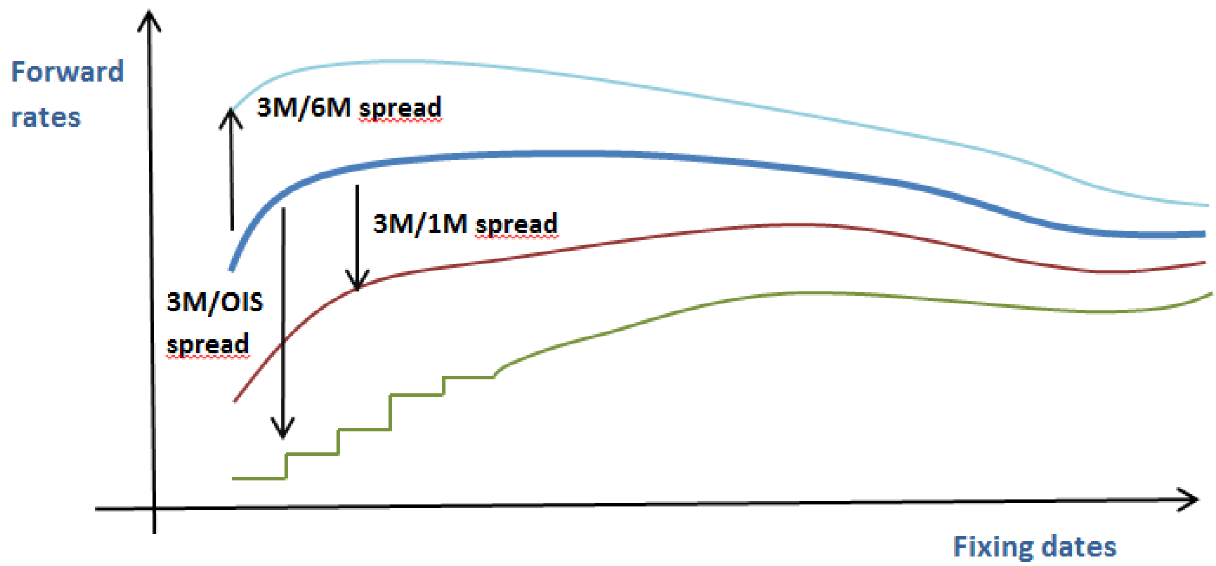
Source : BCE.

Cela correspond au taux le moins risquée possible sur le marché est aujourd'hui assimilé au taux sans risque ; proposant ainsi les rendements les plus faibles (voir négatifs).

Eonia - tables:

Current rate (by day)	
12-30-2016	-0.329%
12-29-2016	-0.355%
12-28-2016	-0.354%
12-27-2016	-0.355%
12-23-2016	-0.356%
12-22-2016	-0.354%
12-21-2016	-0.353%
12-20-2016	-0.354%
12-19-2016	-0.354%
12-16-2016	-0.354%

Les courbes EONIA ou FED-FUNDS permettent d'estimer à combien les banques vont se prêter dans le futur, ce qui est très utile pour le discounting des flux. Ces courbes sont « continues par morceau » entre les dates de fixing des taux directeurs. Plus généralement, ces taux sont appelés OIS (Overnight Indexed Swaps), car ils sont déduits de ces instruments.



Un OIS est un type de swap de taux d'une durée généralement comprise entre 1 semaine et 1 an. Le taux flottant est lié au taux de référence du jour le jour (overnight ou tom/next). Les 2 contreparties conviennent d'échanger à l'échéance, sur un montant notionnel convenu, la différence entre les intérêts acquis au taux fixe et les intérêts acquis par capitalisation sur le taux flottant. Cette capitalisation, qui n'existe pas pour les swaps classiques est réalisée quotidiennement. A l'échéance, seule la compensation sera effectuée et aucun capital ne sera échangé. C'est à dire qu'une des 2 contreparties seulement versera des intérêts à l'autre.

Ci-dessous le tableau des différents indices OIS pour les devises les plus liquides.

Devises	Swap	Indice de référence	Date de départ	Date de paiement	Calcul de l'indice	Base de calcul	Calcul du variable
EURO	EONIA	EONIA	J+1	Maturité+2	Moyenne pondérée	Act/360	Capitalisation
DKK	CITA	T/N	J	Maturité+2	Fixing	Act/360	Capitalisation
GBP	SONIA	SONIA	J+1	Maturité	Moyenne pondérée	Act/365	Capitalisation
SEK	STINA	T/N	J	Maturité+2	Fixing	Act/360	Capitalisation
CHF	TOIS	T/N	J	Maturité+2	Fixing	Act/360	Capitalisation
JPY	OIS	MUTAN	J	Maturité+2	Moyenne	Act/360 ou 365	Capitalisation
USD	OIS	FED FUNDS	J+1	Maturité+2	Moyenne pondérée	Act/360	Capitalisation

- DKK = couronne danoise
- GBP = livre sterling
- SEK = couronne suédoise
- CHF = franc suisse
- JPY = japanese yen
- USD = US dollars

Outil #3 : rachat de bond d'état ou quantitative easing

Cependant la baisse des taux directeurs n'a pas suffi à rassurer les banques commerciales et en juin 2014 il restait 4 milliards d'euros dans les coffres de la banque centrale malgré des taux de dépôt négatifs.

Graphique 2 : Principaux taux de la BCE et taux Eonia

Source : BCE.

Le troisième outil dont dispose une banque centrale est le quantitative easing (QA) ; ce qui correspond à l'injection directe de liquidité dans l'économie par le rachat de bond d'état (govies) sur le marché secondaire. Les conséquences du quantitative easing est une pression à la hausse sur la demande de govies, entrainant ainsi une pression à la hausse sur le prix et donc une pression à la baisse sur les rendements – les entrainant ainsi jusqu'à ce des territoires négatifs comme c'est le cas pour certains pays de la zone euro qui se finance à taux négatifs pour des maturités relativement courtes comme la France ou l'Allemagne.

Taux quotidiens
Les historiques, réunis en un seul fichier, sont accessibles ici

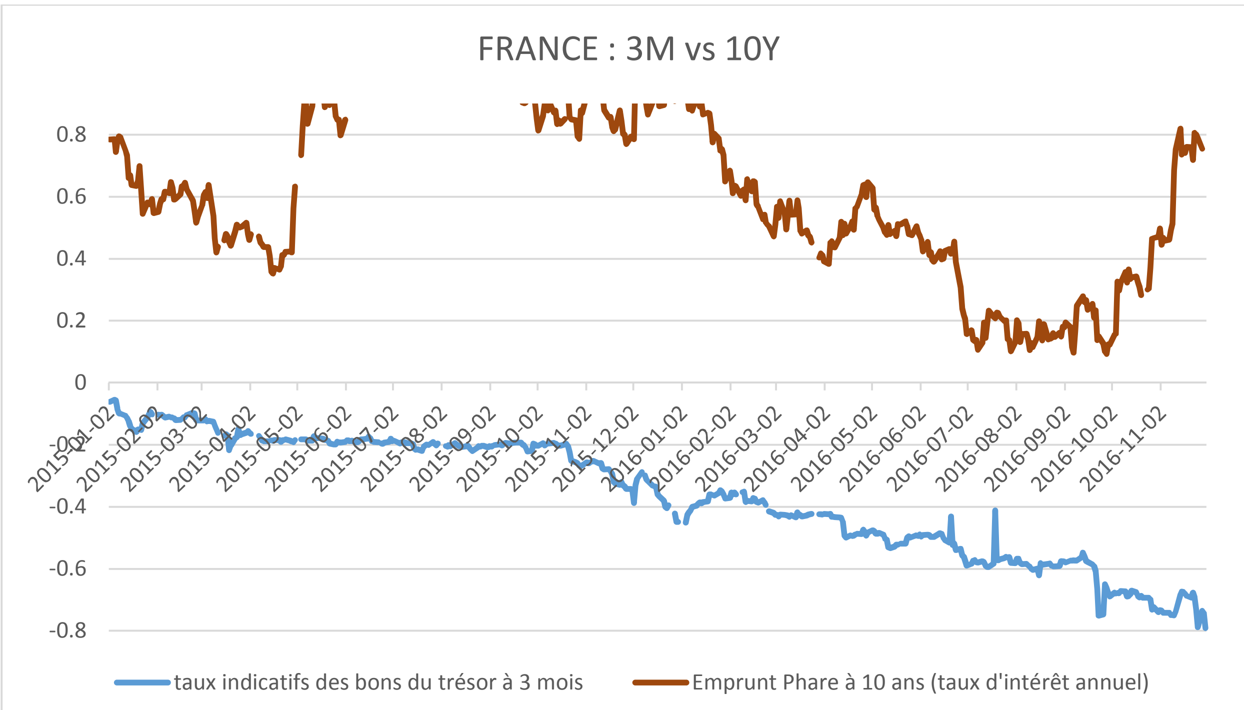
	23/12/2016	27/12/2016	28/12/2016	29/12/2016	30/12/2016
1 mois	-1,0284	-1,6196	-2,0874	-1,3499	-1,0800
3 mois	-0,9907	-0,9972	-1,0409	-0,9096	-0,9042
6 mois	-0,8850	-0,8916	-0,9187	-1,0080	-0,8608
9 mois	-0,8511	-0,8555	-0,8995	-0,8267	-0,8138
1 an	-0,7888	-0,7936	-0,8092	-0,7872	-0,7438
2 ans	-0,6690	-0,6850	-0,6920	-0,7100	-0,6910
5 ans	-0,1140	-0,1480	-0,1450	-0,1440	-0,1290
10 ans	0,7100	0,6740	0,6800	0,6490	0,6820
30 ans	1,5560	1,5350	1,5560	1,5170	1,6170

On remarque avec étonnement que les yields des bonds d'Etat sont inférieurs aux taux de dépôt de la BCE (pour être méticuleux il faudrait comparer avec les taux forward OIS), ce qui est surprenant. Quelques éléments de réponse ? forte demande car :

- Besoin de collatéral en Bonds sûrs (bonds d'état)
- Appétence des Asset Managers pour des produits sans risque de contrepartie (mettre l'argent à la banque qui a un risque de contrepartie)
- Effet du Quantitative Easing (cf avec le groupe qui fait son PPE sur le QE pour un nuancement quantitatif).

En conséquence, les Etats considérés comme peu risqués se financent à court terme à des taux actuariels négatifs ; et relativement faibles sur des périodes plus longues :

- BTF 3M : -0.47% au 18/05/16 & -0.69% au 23/11/16 & -0.99 au 23/12/16
- 10Y OAT : +0.39% au 18/05/16 & +0.80% au 23/11/16 (explications ?) & +0.7% au 23/12/16



➔ Par ce levier, la BCE espère créer de l'inflation par l'Etat.

La grande famille des taux IBOR

L'EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate) désigne un groupe de taux d'intérêt de la devise Euro largement utilisés en Europe. Ils sont, avec l'Eonia, les principaux taux de référence du marché monétaire de la zone euro. Le nom Euribor est formé à partir de la contraction des mots anglais Euro interbank offered rate, soit en français : taux interbancaire offert en euro (Tibeur). Il fait partie des nombreux taux IBOR. L'Euribor est, pour une échéance donnée (par exemple : trois mois, souvent noté EUR3M), le fixing calculé chaque jour ouvré à 11h, heure française, publié par la Fédération bancaire de l'Union européenne (FBE), d'un taux moyen auquel un échantillon de 57 grandes banques établies en Europe prêtent en blanc (c'est-à-dire sans que le prêt ne soit gagé par des titres) à d'autres grandes banques pour une période de trois mois.

$Linear\left(\frac{ACT}{360}\right)$ est la convention pour EURIBOR/LIBOR ainsi que pour le *money-market* rates.

- LIBOR : London Inter-Bank Offered Rate
- EURIBOR : Euro Inter-Bank Offered Rate
- TIBOR : Tokyo Inter-Bank Offered Rate

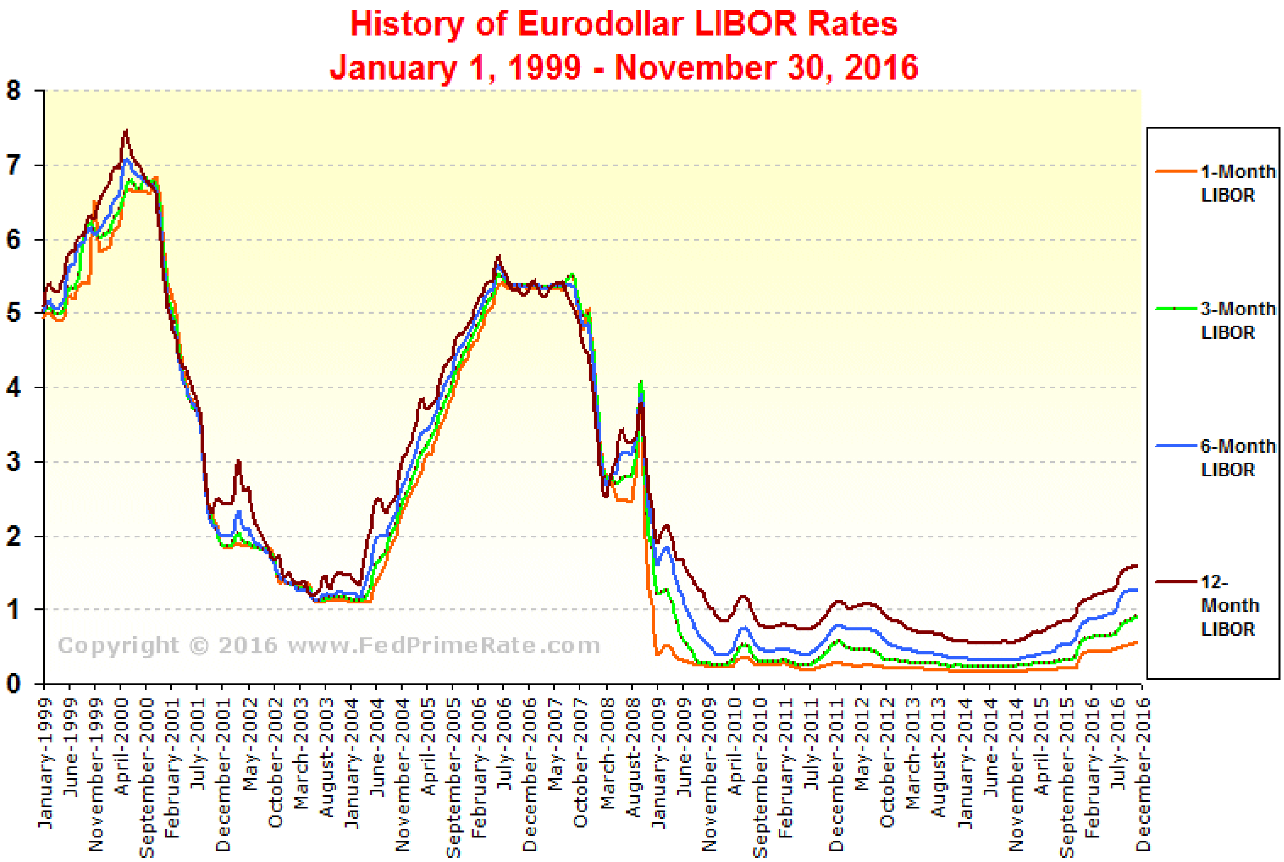
Chaque marché définit un consensus de banque différent pour le fixing quotidien.

Ces taux sont négatifs aujourd'hui, et n'ont jamais été aussi faibles. L'évolution de ces taux IBOR sont modélisés par les courbes IBOR, courbes d'estimation des prêts interbancaires non collatéralisés.

	01-02-2017	12-30-2016	12-29-2016	12-28-2016	12-27-2016
Euribor - 1 week	-0.371%	-0.373%	-0.374%	-0.369%	-0.369%
Euribor - 2 weeks	-0.374%	-0.372%	-0.373%	-0.371%	-0.371%
Euribor - 1 month	-0.368%	-0.368%	-0.368%	-0.366%	-0.369%
Euribor - 2 months	-0.336%	-0.338%	-0.338%	-0.337%	-0.337%
Euribor - 3 months	-0.318%	-0.319%	-0.319%	-0.319%	-0.318%
Euribor - 6 months	-0.220%	-0.221%	-0.221%	-0.221%	-0.220%
Euribor - 9 months	-0.140%	-0.139%	-0.139%	-0.139%	-0.139%
Euribor - 12 months	-0.083%	-0.082%	-0.081%	-0.082%	-0.081%

Historique des fixings de l'EURIBOR

C'est-à-dire qu'au 30/12/2016, les banques commerciales ont « ***déclaré*** » pouvoir emprunter de l'argent pour une durée d'1 an, pour au taux moyen de -0.083%. Diminuer les taux directeurs est une motivation pour les banques commerciales de ne laisser dans les coffres (numériques) de leur banque centrale seulement les réserves légales et pas un euro de plus, les poussant ainsi à financer les autres banques et l'économie réelle (e.g. prêt aux entreprises ou aux particuliers) entrainant de l'inflation (ou diminuant la déflation).



Historique des taux Libor.

Différences entre les IBOR et les OIS

➔ **Faire le point sur la compréhension générale**

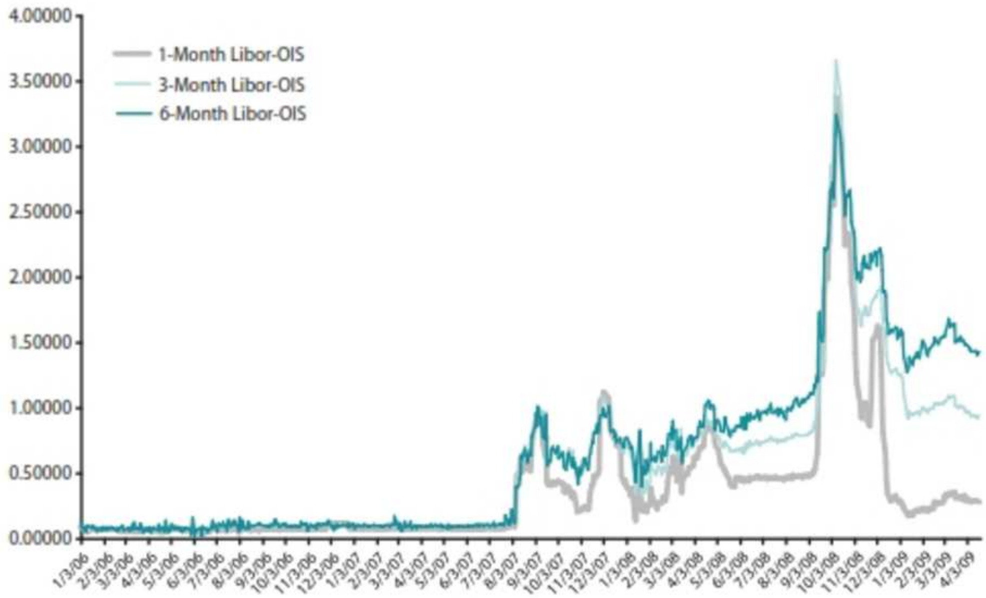
Ainsi, et bien que les taux IBOR et les taux OIS représentent le même type de prêt, c'est-à-dire des emprunts interbancaires non-gagés, ils ont néanmoins des différences :

Fixing et lien macro-économiques

- Les taux de dépôt est défini par un comité officiel (FOMC aux USA, ECB en France) afin d'implémenter une politique monétaire. Ainsi les OIS sont le fruit d'opérations réelles et monitorées par des organes de contrôle
- Les IBOR sont fixés selon un questionnaire où un groupuscule de puissantes banques devine les taux auxquels elles pourraient emprunter auprès d'autres banques. Ainsi les IBOR n'ont pas de lien avec la macro-économie, et furent soumis à quelques malversations.

Maturités les plus liquides

- Les OIS sont pour des prêts d'une journée
- Les IBOR les plus liquides sont 1M, 2M, 3M, 6M, 1Y. D'autres maturités existent mais sont relativement peu utilisées (surtout depuis la crise de 2008, et le switch à l'OIS discounting (cf plus loin dans le cours).



Spread entre les Libor de différentes maturités et le taux Fed-Fund.

Lien entre le taux directeur et la banque de détail

En tant qu'emprunteur, le taux de votre emprunt va dépendre nombreuses données endogènes (votre niveau de risque, la maturité de votre prêt, les garanties que vous pouvez apportées...), mais aussi du taux auquel les banques se prêtent et empruntent de l'argent entre elles (en zone euro l'EONIA) et correspond au taux au jour le jour des dépôts interbancaires non-garantis. Et il existe comme on l'a vu une relation directe entre ce taux EONIA, et les taux de la Banque Centrale. Les IBOR sont également très fortement corrélés (avec des pics en période de crise de liquidité).

Sur le graphique ci-dessous, on remarque facilement le très fort lien entre le taux EURIBOR 3-mois et les différents taux d'emprunt des ménages (households) et des entreprises (non-financial corporations). La différence entre le taux d'un prêt le taux interbancaire de même maturité représente à peu près la marge réalisée par la banque (couverture des coûts, prime de risque...).

Ainsi, en période de crise grave, il est possible qu'une banque centrale ait des difficultés à booster l'investissement et la consommation si la transmission de la politique monétaire via les banques ne fonctionne plus, par exemple si les banques n'osent plus prêter de l'argent par peur que les entreprises ou les ménages ne puissent rembourser leurs emprunts (situation de "credit crunch"). C'est là que peuvent intervenir les méthodes non-conventionnelles des banques centrales, comme le LTRO 3 ans ou bien de nombreuses mesures prises par la FED (le taux de la FED étant déjà à 0%, impossible de le baisser davantage).

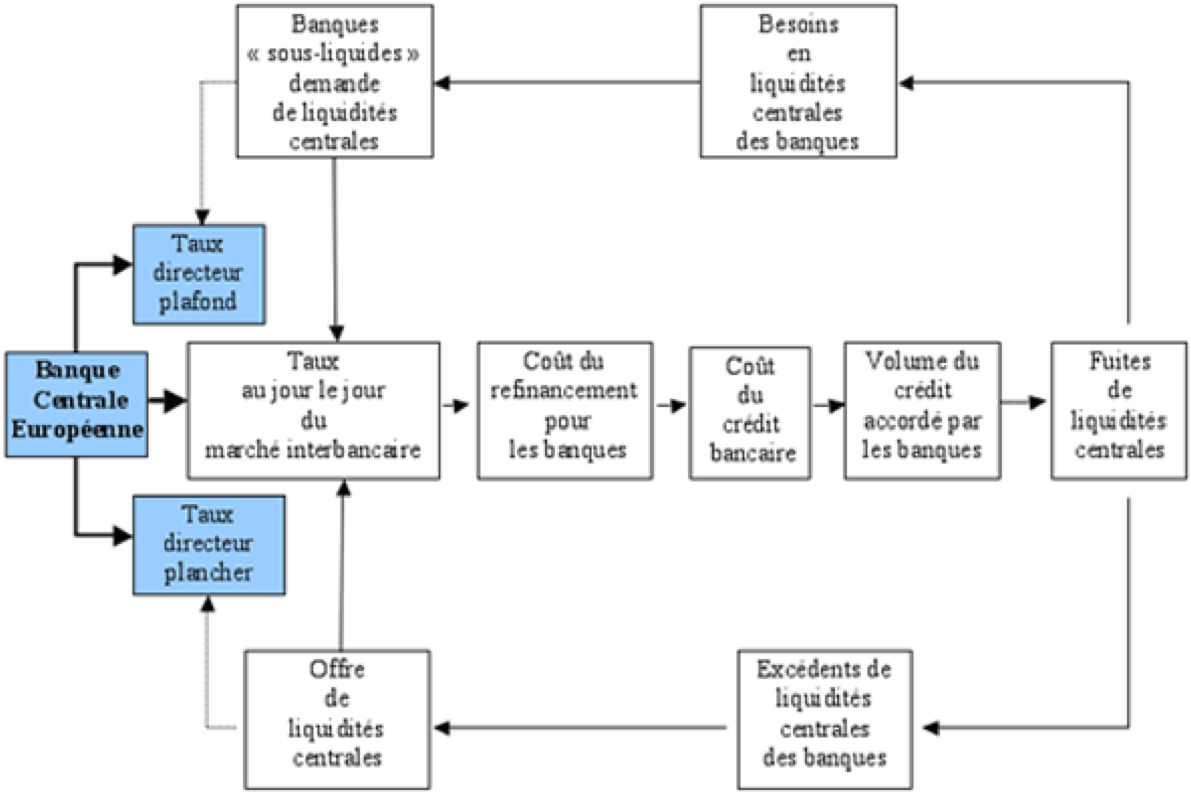
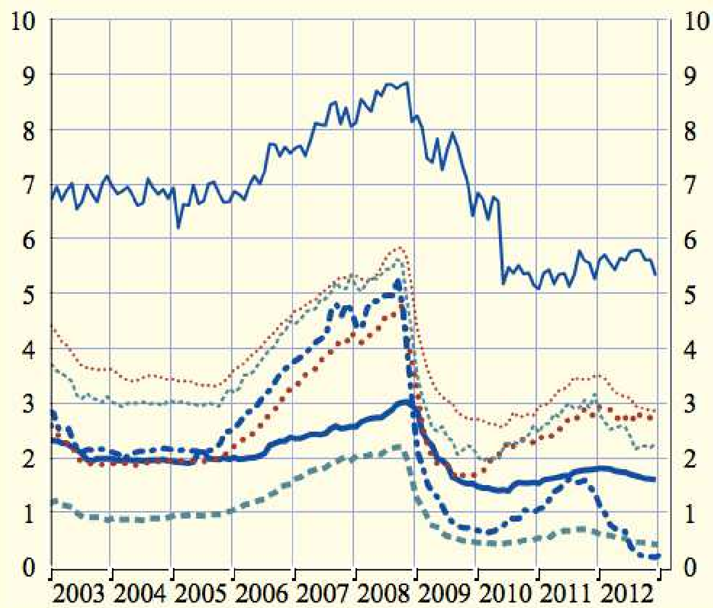

Banques « sous-liquides » demande de liquidités centrales
Besoins en liquidités centrales des banques
Taux directeur plafond
Banque Centrale Européenne
Taux au jour le jour du marché interbancaire
Coût du refinancement pour les banques
Coût du crédit bancaire
Volume du crédit accordé par les banques
Fuites de liquidités centrales
Taux directeur plancher
Offre de liquidités centrales
Excédents de liquidités centrales des banques

Chart 16 Short-term MFI interest rates and a short-term market rate

(percentages per annum; rates on new business)

- deposits from households redeemable at notice of up to three months
- deposits from households with an agreed maturity of up to one year
- overnight deposits from non-financial corporations
- loans to households for consumption with a floating rate and an initial rate fixation period of up to one year
- loans to households for house purchase with a floating rate and an initial rate fixation period of up to one year
- loans to non-financial corporations of over €1 million with a floating rate and an initial rate fixation period of up to one year
- three-month money market rate



Source: ECB.
Note: Data as of June 2010 may not be fully comparable with those prior to that date owing to methodological changes arising from the implementation of Regulations ECB/2008/32 and ECB/2009/7 (amending Regulation ECB/2001/18).

Prix des instruments de taux linéaires

Lorsque l'on veut discounter un flux entre deux dates, le premier réflexe est de trouver un instrument sur le marché qui réplique ce flux, et d'en déduire du prix de marché de cet instrument le taux de discount à appliquer au flux futur.

Différentes conventions pour plusieurs produits

Compounding (intérêt composés)

Il existe de nombreuse formule de capitalisation pour la composition des intérêts. Il est possible de passer d'une formule à une autre et de trouver les taux équivalents. Soit $P(t,T)$ le prix d'un bond payant 1 EUR en t=T, vu de t=t0.

- Annual Compound Interests (aka Yield convention) : $DF(t_0,T) = P(t_0,T) = \frac{1}{(1+y(t_0,T))^{T-t_0}}$
- Compound Interests k times a year : $DF(t_0,T) = P(t_0,T) = \frac{1}{\left(1+\frac{y(t_0,T)}{k}\right)^{(T-t_0)*k}}$
- Continously Compounding : $DF(t_0,T) = P(t_0,T) = e^{-r(t_0,T)*(T-t_0)}$
- Linear compounding : $DF(t,T) = P(t_0,T) = \frac{1}{(1+L(t_0,T)*(T-t_0))}$

Décompte des jours

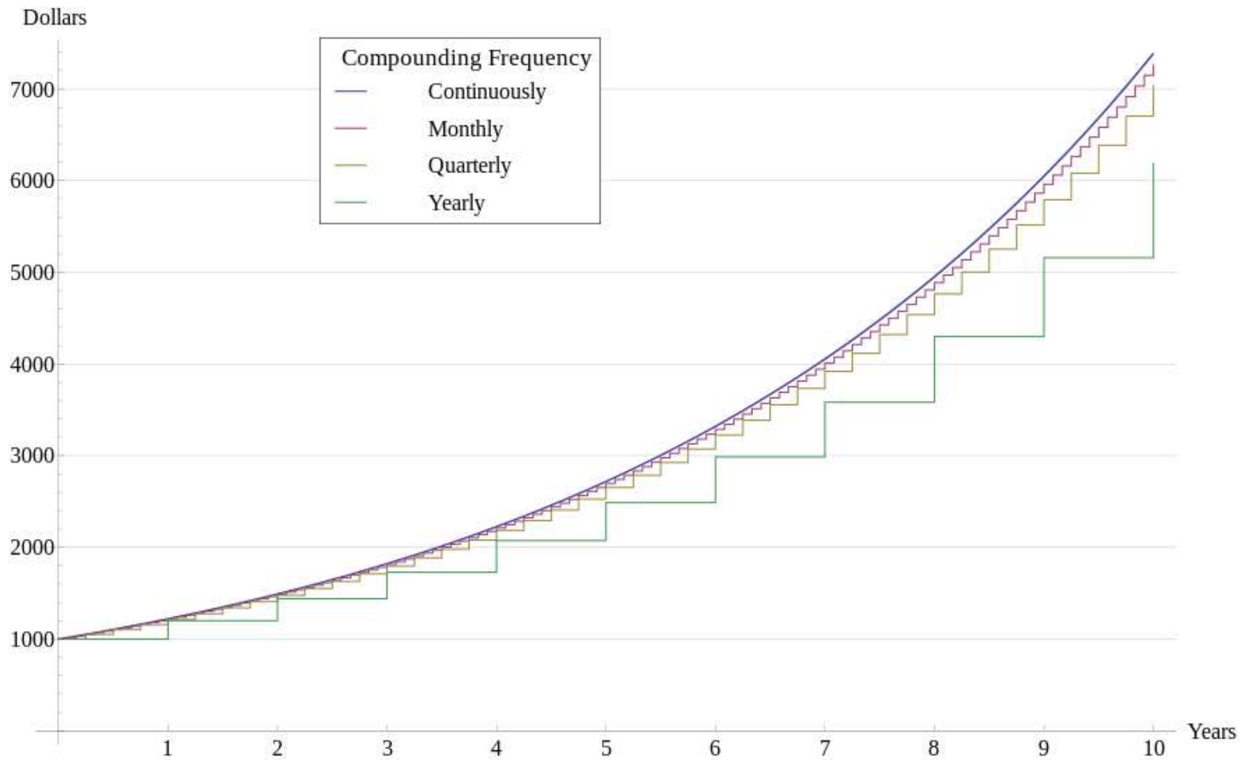
T est exprimé en une fraction d'année, mais il y a plusieurs conventions pour calculer ces fractions.

Soit t1 = (d1, m1, y1) et t2 = (d2, m2, y2), nous avons à titre d'exemple:

- Money Market : $\frac{ACT}{360} = \frac{Nombre\ de\ jours\ entre\ les\ deux\ dates}{360}$
- Bond Basis : $\frac{30}{360} = \frac{\max(30-\mathrm{d1},0) + \min(\mathrm{d2},30) + 30*(\mathrm{m2}-\mathrm{m1},-1) + 360(\mathrm{y2}-\mathrm{y1})}{360}$
- Discount factors : $\frac{ACT}{365} = \frac{Nombre\ de\ jours\ entre\ les\ deux\ dates}{365}$

Ajustement des jours fériés

- Adjusted / Following : si t1 ou t2 sont fériés, on choisit le premier jour non-férié suivant t1 ou t2.
- Adjusted / Preceding : si t1 ou t2 sont fériés, on choisit le premier jour non-férié précédent t1 ou t2.
- Adjusted / Modified following : si t1 ou t2 sont fériés, on choisit le premier jour non-férié suivant t1 ou t2, mais précédent si l'on cela change le mois.
- Unadjusted : pas d'ajustement.



La capitalisation multi-annuelle correspond à plus de payements d'un taux moins important. De même, la capitalisation continue correspond à la limite de la capitalisation discrète. En effet :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} e^{n*\ln\left(\frac{1}{n}\right)} = e = 2.7182818$$

$$\lim_{n\to\infty} N\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n*t} = \lim_{n\to\infty} N\left(1+\frac{1}{x}\right)^{r*x*t} = \lim_{n\to\infty} N\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{r*t} = Ne^{r*t}$$

Pour une durée fixée, il est possible de trouver des taux équivalents selon la méthode de capitalisation.

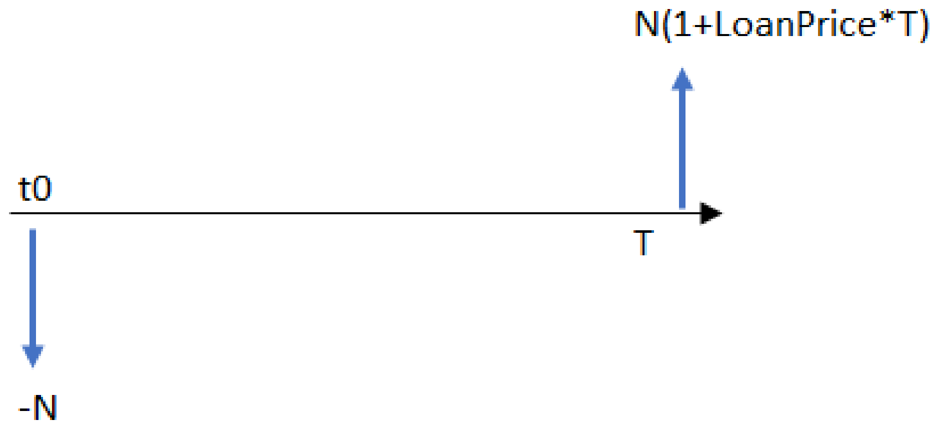
Les Loans (dépôts en blanc / prêts non gagés)

Les loans in-fine

Entrent dans cette catégorie les opérations de Prêt/Emprunt (pour les opérations Interbancaires) non collatéralisés. Une opération de trésorerie ne fait intervenir qu'une seule devise. Un certain montant (le capital) est échangé au départ de l'opération. Un taux d'intérêt (pourcentage) appliqué à ce capital servira à calculer des intérêts. Le capital sera remboursé à l'échéance.

A t=0 l'emprunteur emprunte N.

A la maturité il rembourse $N * \left(1 + LoanPrice \cdot (T - t_0)\right)$.



La market-value de ce trade sera donc :

$$MV(t = T) = N \cdot (1 + LoanPrice \cdot T) - N$$

Ainsi

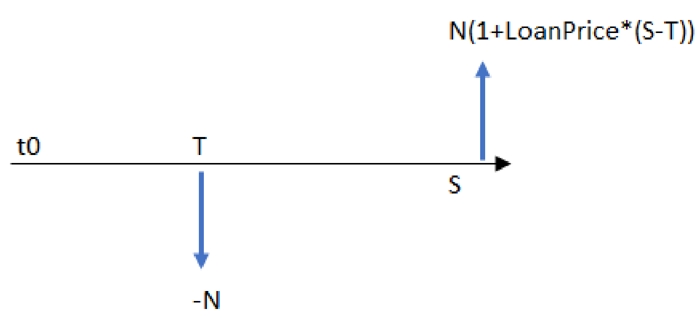
$$MV(t = 0) = N \cdot (1 + LoanPrice \cdot T) \cdot DF(T \to 0) - N$$
$$MV(t = 0) = N \cdot \left((1 + LoanPrice \cdot T) \cdot e^{-ZC(T)*T} - 1\right)$$

Dans le cadre d'une calibration, on annule cette MV pour trouver le taux ZC déduit de prix du loan :

$$ZC(T) = -\frac{1}{T1} \cdot \ln\left(\frac{1}{1 + LoanPrice \cdot T1}\right)$$

On remarque qu'il s'agit d'un simple changement de convention, de la convention du loan vers la convention du discount factor.

Forward-start loans

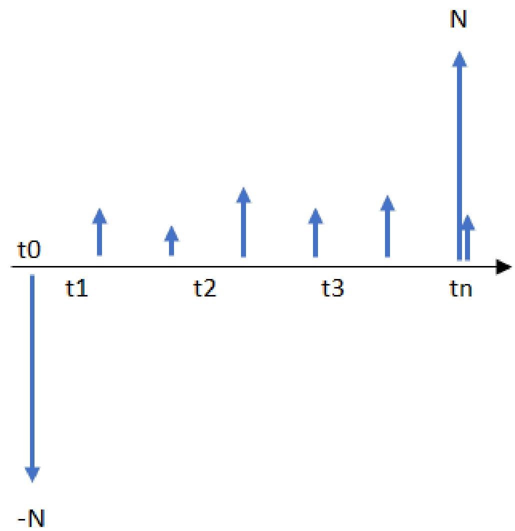


$$MV(t = 0) = N \cdot \left(\left(1 + LoanPrice \cdot (S - T)\right) \cdot e^{-ZC(S)*S} - e^{-ZC(T)*T}\right)$$

$$LoanPrice = \frac{1}{S - T}\left(\frac{e^{-ZC(T)*T}}{e^{-ZC(S)*S}} - 1\right) = F(t, T, S)$$

$F(t, T, S)$ est appelé le taux forward. Il est également annualisé.

Floating loans



$$MV(t=0) = N \cdot \left(-1 + DF_{t_N} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{DF_{t_{i-1}}}{DF_{t_i}} - 1\right) . DF_{t_i}\right)$$

$$MV(t=0) = N \cdot \left(-1 + DF_{t_N} + \sum_{i=1}^{N} (DF_{t_{i-1}} - DF_{t_i})\right)$$

$$MV(t=0) = N \cdot (-1 + DF_{t_N} + 1 - DF_{t_N}) = 0$$

Ce résultat indique qu'un floating loan n'est pas du tout sensible aux taux d'intérêt. C'est pour cette raison que les banques de détails échangent leurs flux fixes qui présentent un risque de taux avec les banques d'investissements par la souscription de swaps.

Interest Rate Futures

Les marchés à termes (Futures market)

Les marchés à terme existent depuis de nombreuses années sur certaines matières premières (or, café, blé, soja, pommes de terre, etc.). Ces marchés aident les producteurs et/ou importateurs à se protéger d'éventuelles variations contraires à leurs intérêts. Un contrat à terme (ou Future) est un contrat entre un acheteur et un vendeur qui s'entendent sur un prix pour recevoir et livrer une marchandise à une date future. Plus tard et pour les mêmes raisons, ces marchés à terme se sont étendus aux marchés financiers.

Au début des années 70, fut créé l'I.M.M. (International Money Market) par le Chicago Mercantile Exchange afin de développer les contrats à terme sur les produits financiers. Un contrat à terme sur l'or fut proposé en 1974, suivit en 1976 par un contrat à terme portant sur les taux des bons du trésor à 3 mois. Ainsi chacune des grandes places financières propose des prix « Futures » sur différents actifs financiers (bons du Trésor, Certificat de dépôt, Commercial Paper, indices boursiers, contrats d'intérêts).

Chicago propose depuis de nombreuses années un contrat USD 3 mois. En France, un contrat sur le PIBOR FRF 3 mois a été introduit en 1988, il a été remplacé depuis par un contrat sur l'EURIBOR.

Ces marchés sont très actifs et (à fortiori) très liquides, ils permettent également d'intervenir avec une faible immobilisation par rapport au physique.

En contrepartie, ces marchés sont réglementés et relativement rigides. Ainsi, les contrats doivent-ils porter sur des montants unitaires (ou des multiples de ce montant), les durées et échéances sont imposées, certaines garanties sont exigées, etc…

Les Financial Futures (Futures contracts)

Un Financial Future est l'appellation Anglo-Saxonne du contrat à terme sur instrument financier. Il s'agit d'un engagement contracté par 2 contreparties, d'échanger un instrument financier à une date future et à un prix fixé d'avance. Cet engagement est ferme et ne peut être reporté à l'échéance. Le dénouement peut donc s'effectuer de 2 manières seulement :

- Avant l'échéance, par une opération de sens inverse. On dit ouvrir et clore une position de Future.
- A l'échéance, par échange monétaire.

La raison de l'existence d'un marché à terme d'instrument financier est liée au besoin des investisseurs de se garantir contre de fortes variations de prix (notamment en cas d'instabilité monétaire).

Ces investisseurs trouvent comme contreparties des spéculateurs qui estiment avoir une meilleure méthode d'estimation des prix.

Les marchés de Futures sont des marchés dits organisés. Ils ont pour caractéristiques:

- De porter sur des marchandises (ou instruments financiers) standardisés en date, montant.
- De bénéficier de la garantie de bonne fin par l'existence d'une chambre de compensation qui se porte légalement contrepartie de toutes les transactions.
- D'être un marché le plus ouvert possible : Banques, investisseurs financiers, compagnies d'assurance, fonds de pensions et de retraites, entreprises, courtiers de Banques, etc.

Principaux marchés à terme

Il existe différents marchés de « Financial Futures » dont notamment:

- **Le C.B.O.T. (Chicago Board of Trade)** : le plus ancien (1848), spécialisé dans les marchés à terme sur les taux d'intérêt, les indices boursiers, les métaux précieux, les produits agricoles.
- **Le C.M.E. (Chicago Mercantile Exchange)** : 2ème bourse de Chicago (1919), spécialisée à l'origine dans les marchés à terme de produits agricoles et se diversifiant dans les années 1970 vers les produits financiers.
- **L'I.M.M. (International Money Market)** : créé en 1972 à Chicago, spécialisé dans les contrats à terme sur les devises ainsi que les options.
- **Le L.I.F.F.E. (London International Financial Future and Options Exchange)** : créé en 1982, reprend en grande partie les contrats traités par l'I.M.M.
- Le S.I.M.E.X. (Singapore International Monetary Exchange) créé en 1984. On y traite des contrats à terme sur devises, indices boursiers et taux d'intérêt.
- Le M.A.T.I.F. (Marché à Terme International de France) officiellement ouvert en 1986. On y traite des contrats à terme sur taux d'intérêt, des contrats d'options.

Evaluation des Futures de taux

Ce sont des produits listés sur les taux courts, côtés par plusieurs exchanges.

- Les maturités des futures sur l'EURIBOR3M sont côtés tous les mois pendant 6 mois, puis tous les trois mois jusqu'à 5 ans.
- Le prix du Future est côtés en 100-R
- Les Futures sont « clearés » au quotidien : la MV est annulée chaque jour au profit de cash-flows. Ainsi les gains réalisés correspondent à la somme des appels de marge. De ce fait, il n'est pas nécessaire de discounter les flux au-delà de T.

$$MV(t=T) = \frac{Nom \cdot \big(Tfra - F(t=T,T,S)\big) \cdot (S-T)}{1 + Tfra \cdot (S-T)}$$

$$MV(t=0) = \frac{Nom \cdot \big(Tfra - F(0,T,S)\big) \cdot (S-T)}{1 + Tfra \cdot (S-T)}$$

$$MV(t=0) = \frac{Nom \cdot \left(Tfra - \frac{1}{S-T} * \left(\frac{e^{ZC(-T)*T}}{e^{ZC(-S)*S}} - 1\right)\right) \cdot (S-T)}{1 + Tfra \cdot (S-T)}$$

Les FRA (Forward Rate Agreement)

Définition

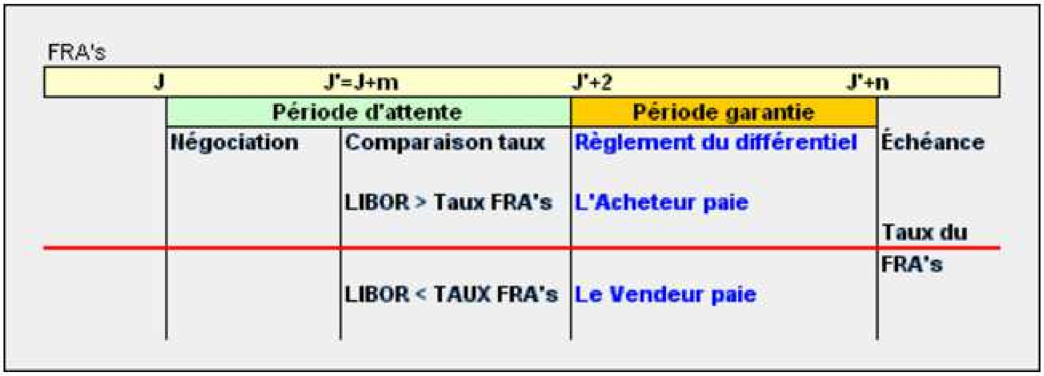
Les contraintes exposées dans les rubriques précédentes ont poussé les acteurs financiers à rechercher un instrument offrant les mêmes avantages que les contrats futures mais d'une plus grande souplesse d'utilisation. A cet effet, ont été imaginés les FRA's (Forward Rate Agreement) ou Accords de Taux Futurs en français.

Le FRA est un instrument de garanti de taux. Un contrat de ce type n'implique pas la mise en place effective d'une opération de dépôt : ne sera échangée que la différence d'intérêt entre le taux du contrat et le taux du marché (généralement un taux de référence standard tel que le Libor, l'Euribor, etc.) Le montant du contrat n'est qu'un montant notionnel destiné uniquement aux calculs.

Pour les Banques, ce dernier point est très important car la mise en place d'un contrat de FRA n'impactera les limites que d'une fraction du montant notionnel (variable selon les établissements), de plus ce type de transaction n'impacte pas le bilan.

Le FRA's comporte 2 périodes :

- Une période d'attente. Pendant cette période, il ne se passe rien. L'une ou l'autre des contreparties a toute latitude pour déboucler ou non son opération par quelque arbitrage que ce soit.
- Une période garantie. C'est sur cette période que porte la garantie de taux. Au départ de cette période, on comparera le taux garanti avec son équivalent (en terme de période) sur le marché. La différence sera réglée d'avance (donc actualisée) par l'une des contreparties. Le taux d'un FRA est donc bien un taux In Fine, ce qui simplifie les comparaisons et calculs par rapport au taux de dépôt classiques.



Les FRA's ont leur propres usages. Ainsi prenons par exemple un 6 mois dans 3 mois. Pour un FRA on dira un 3/9 (3 contre 9). Etant moins standardisé, le marché des FRA's est également moins liquide, de ce fait les prix comportent un bid/ask, que l'on négligera dans le cadre de ce cours. De plus pour cet instrument on a l'habitude d'employer les termes acheteur/vendeur plutôt qu'emprunteur/prêteur.

Supposons un contrat de FRA USD 6/12 (6 contre 12, soit 6 mois dans 6 mois) négocié à 5,35. Deux jours ouvrés avant la période garantie, on constate que le taux LIBOR 6 mois s'établit à 5 1/2. Le différentiel d'intérêt sera actualisé (car payé d'avance) sur la période :

- Si le taux du FRA est supérieur au taux du marché, le différentiel sera payé par l'acheteur.
- Si le taux du FRA est inférieur au taux du marché, le différentiel sera payé par le vendeur.

C'est ici que se matérialise la garantie de taux. En effet dans notre exemple, nous devrons emprunter sur le marché à 5 ½ (pour couvrir notre prêt client par exemple). Or grâce à notre FRA, la contrepartie va nous verser la différence entre le taux du contrat et le Libor (soit 0,15). Ce différentiel nous permet donc de ramener le taux de notre emprunt à 5,35. Bien entendu, en cas de baisse des taux, le différentiel jouerait en notre défaveur car c'est nous qui devrions le régler. C'est ce qu'on appelle se hedger (couvrir le risque à la hausse tant qu'à la baisse).

Evaluation

Les FRA (ou Forward Rate Agreement) est un contrat financier où une contrepartie A accepte de payer au taux de FRA Tf contre un taux-forward de référence constaté sur le marché, fixé en T et payable en S. Le payoff (payé en t=T, le début de la période de référence, est $Nom \cdot \frac{(TR-F(t=T,T,S))\cdot(S-T)}{1+TR\cdot(S-T)}$

Ainsi en t=0, on a :

$$MV(t=T) = Nom \cdot \frac{\big(Tfra - F(t=T,T,S)\big)\cdot(S-T)}{1+Tfra\cdot(S-T)} \cdot DF(T \to 0)$$

$$MV(t=0) = Nom \cdot \frac{\big(Tfra - F(0,T,S)\big)\cdot(S-T)}{1+Tfra\cdot(S-T)} \cdot DF(T \to 0)$$

$$MV(t=0) = Nom \cdot \frac{\left(Tfra - \left(\frac{e^{-ZC(T)*T}}{e^{-ZC(S)*S}} - 1\right) * \frac{1}{S-T}\right)\cdot(S-T)}{1+Tfra\cdot(S-T)} \cdot DF(T \to 0)$$

Pour trouver le taux zero-coupon équivalent, il faut annuler la MV. Ainsi :

$$Tfra = \left(\frac{e^{f(ZC(S))*T}}{e^{ZC(S)*S}} - 1\right) * \frac{1}{S-T}$$

Cela correspond au taux forward utilisé par les loan forward.

Différences entre les FRA et les Futures (mêmes taux de références / même dates)

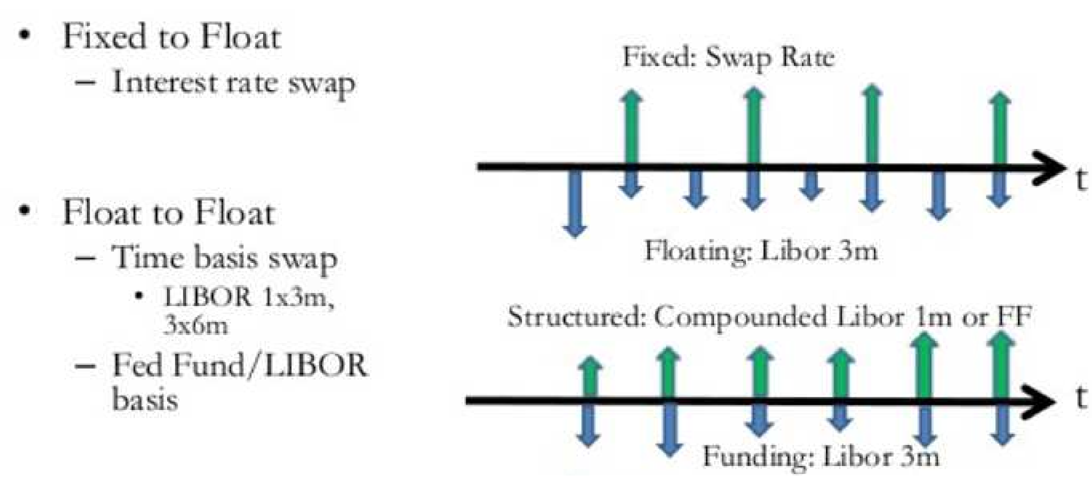
Plus leur échéance est éloignée dans le temps, et plus les futures sur IBOR 3 mois sont différents des FRA qu'ils sont pourtant censés répliquer. En effet, à la différence des contrats à terme, dont les variations de taux in fine donnent lieu au paiement immédiat et linéaire de la différence de prix, via l'appel de marges, les FRA ne peuvent provoquer que des gains ou des pertes dans l'avenir, qu'il convient donc d'actualiser, et dont la valeur actuelle, non linéaire, possède donc une convexité supérieure à celle des futures.

Cela implique que si les deux instruments avaient le même taux in fine, il existerait un arbitrage sans risque à acheter en grande quantité un FRA éloigné, vendre le future correspondant et ajuster la position en risque de taux chaque jour en profitant donc de la volatilité du marché. Afin de neutraliser ce phénomène, les futures doivent donc avoir un taux supérieur à celui des FRA, et ce de manière croissante avec l'éloignement dans le temps (ceci dit le convexity bias s'est inversé avec l'arrivée des taux négatifs).

La différence de taux entre les deux instruments s'appelle en anglais convexity bias, soit donc : correction à apporter compte tenu des convexités différentes. Elle n'est malheureusement pas calculable directement et relève d'hypothèses sur la volatilité future des taux d'intérêt à court terme.

Interest Rate Swaps

Les swaps peuvent-être vus comme une somme de FRA avec un taux fixe.



$$FloatingLeg(t=0) = N.\sum_{i=1}^{t_N} F(t=0, t_{i-1}, t_i) * \delta * DF(t_i \to 0)$$

$$F(t=0, t_{i-1}, t_i) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{DF(t_{i-1} \to 0)}{DF(t_i \to 0)} - 1\right)$$

$$FloatingLeg(t=0) = N.\sum_{i=1}^{t_N}\left(DF(t_{i-1} \to 0) - DF(t_i \to 0)\right)$$

$$FloatingLeg(t=0) = N.\left(1 - DF(t_N)\right)$$

$$FixedLeg(t=0) = -SwapPrice_{fixed} * \delta * \sum_{i=1}^{t_N} DF(\,t_i \to 0)$$

A inception, le P&L du swap doit être nul. Ainsi il faut égaliser les deux jambes. De cela on en déduit le taux de swap :

$$MV(t=0) = FloatingLeg(t=0) + FixedLeg(t=0) = 0$$

$$\Leftrightarrow SwapPrice_{fixed} = \frac{1 - DF(t_N)}{\delta * \sum_{i=1}^{N} DF(\,t_i)}$$

Basis-swaps

Une approche similaire est utilisée pour pricer les basis swaps, cependant les deux jambes sont flottantes.

$$FloatingLeg1(t=0) = N.\left(1 - DF_{leg1}(t_N)\right)$$

$$FloatingLeg2(t=0) = N.\sum_{i=1}^{t_N}(F(t=0, t_{i-1}, t_i) + SwapPrice) * \delta * DF(t_i)$$

$$FloatingLeg2(t=0) = N.\left(\left(1 - DF_{leg2}(t_N)\right) + SwapPrice_{basis} * \delta * \sum_{i=1}^{t_N} DF_{leg2}(\,t_i)\right)$$

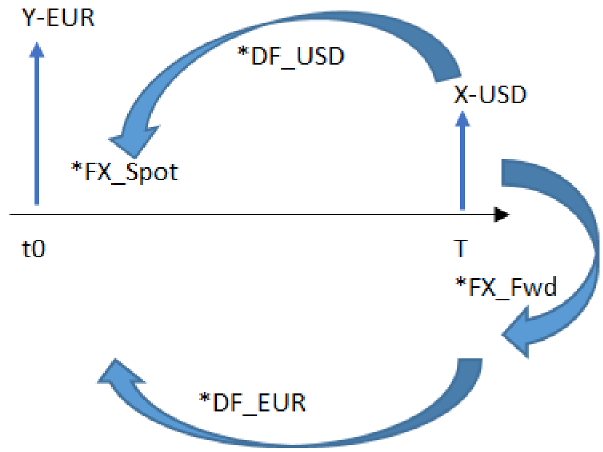
A inception, le P&L du swap doit être nul. Ainsi il faut égaliser les deux jambes. De cela on en déduit le taux de swap :

$$PL(t=0) = FloatingLeg(t=0) + FixedLeg(t=0) = 0$$

$$<=>$$

$$SwapPrice_{basis} = \frac{\left(DF_{leg2}(t_N) - DF_{leg1}(t_N)\right)}{\delta * \sum_{i=1}^{N} DF_{leg2}(\,t_i \to 0)}$$

Notion importante : les FX-Forwards



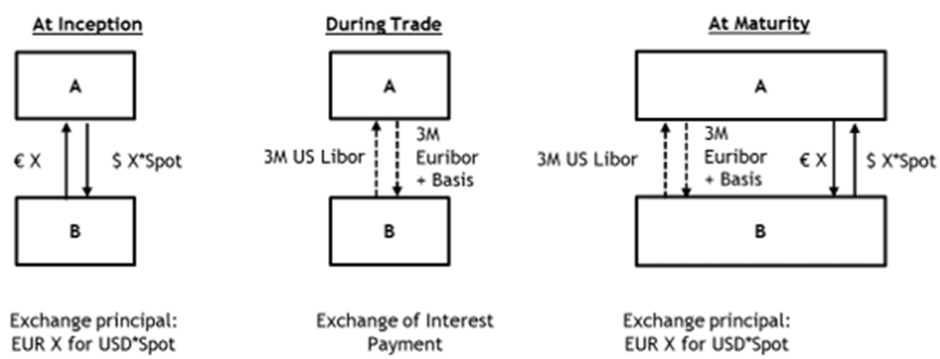
Pour trouver le FX_Forward, il s'agit d'exprimer la valeur d'un flux futur de X-USD en t=T, en EUR et à t=0, de deux manière différente :

$$Y_{EUR} = X * DF_{USD}(T) * FX_{\frac{USD}{EUR}}(Spot) = X * FX_{\frac{USD}{EUR}}(T) * DF_{EUR}(T)$$

Ainsi :

$$FX_{USD/EUR}(T) = FX_{USD/EUR}(Spot)\frac{DF_{USD}(T)}{DF_{EUR}(T)}$$

Cross-currency swaps – inutile en framework mono-courbe



- ➔ Donner le taux de swap d'un cross-currency swap en framework mono-curve.
- ➔ Expliquer pourquoi il est rassurant que ce taux soit ainsi ?

At inception, exchange of nominal

$$Leg_{EUR}(t=0) = N - N.\sum_{i=1}^{t_N} \delta * (F_{EUR}(t=0, t_{i-1}, t_i) + SwapPrice_{basis}) . DF_{EUR}(t_i) - N.DF_{EUR}(t_N)$$

$$Leg_{EUR}(t=0) = -N.\delta.SwapPrice_{basis}\left(1 - DF_{EUR}(t_N)\right)$$

$$Leg_{USD}(t=0) = N.FX_{EURUSD}.\Big(-1 + \big(1 - DF_{USD}(t_N)\big) + DF_{USD}(t_N)\Big) * \frac{1}{FX_{EURUSD}} = 0$$

A inception, le P&L du swap doit être nul. Ainsi il faut égaliser les deux jambes. De cela on en déduit le taux de swap :

$$SwapPrice_{basis} = 0$$

Le basis-swap est la somme de deux forward-loans. Lorsqu'il n'y a pas de préférence à avoir une monnaie qu'une autre (c'est-à-dire que la courbe utilisé pour discounter les flux EUR est la même que la courbe qui sert à calculer les FX_Forwards, alors le prix du swap est et demeure nul). Ca n'est pas le cas en pratique car il y a toujours de l'appétence à posséder une devise plutôt qu'une autre.

Cross-currency swaps – en framework multi-curve (cf fin du cours)

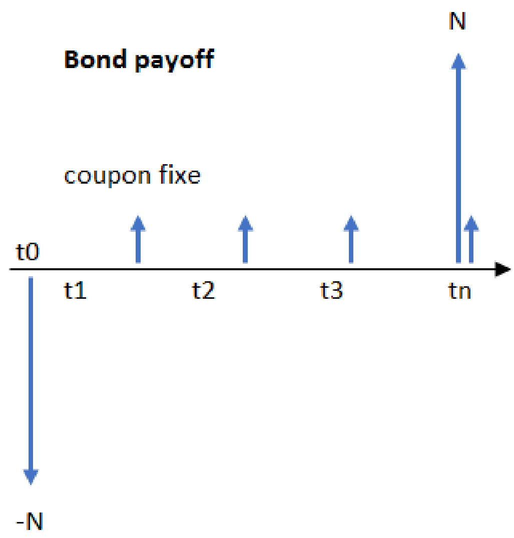
A écrire.

TD1 : Pricing de divers instruments de taux

Le cas particulier des Bonds (Obligations)

Obligation de 500 F à 5 % au porteur, 1901, gravée par Luigi Loir.

Une obligation est une valeur mobilière qui constitue une créance sur son émetteur, elle est donc représentative d'une dette financière à moyen, long terme, parfois même à perpétuité. Cette dette est émise dans une devise donnée, pour une durée définie et elle donne droit au paiement d'un intérêt fixe, appelé coupon qui est parfois capitalisé jusqu'à sa maturité. Les obligations sont notées en fonction du profil de risque de leurs émetteurs par des agences de notation, et incorporent une forte composante de risque de Crédit (on aurait potentiellement pu l'inclure dans le risque de Contrepartie). Il existe une grande diversité de titres sur le marché obligataire, les plus courants étant les Bonds d'Etat et les Bonds Corporate.



Payoff d'un Bond à taux fixe

On appelle Yield d'un bond le taux auquel on peut discounter l'ensemble des flux en conventions Yield de manière à annuler la market value. Cela correspond au TRI du bond (taux permettant d'annuler la VAN du bond).

$$yield \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} \frac{Flux(t_i)}{\left(1+\frac{yield}{k}\right)^{k*t_i}} = 0$$

Dans le cadre de la calibration des courbes de taux, on a tendance à utiliser une convention continue (et non une convention yield). Ainsi pour utiliser l'instrument Bond dans le cadre d'une calibration de courbe de taux on devrait utiliser la formule ce-dessous :

$$PL(t=0) = \sum_{i=0}^{N} Flux(t_i) * DF(t_i)$$

Généralités sur les courbes de taux

Lorsque vous empruntez de l'argent à la banque, le banquier vous proposera un taux d'intérêt annuel plus élevé pour une maturité de prêt (loan maturity) plus lointaine. On remarque ainsi que le taux d'intérêt n'est pas constant avec le temps, et présente une structure par termes. Ainsi, une courbe de taux est une fonction qui, à une date donnée, associe pour chaque maturité le niveau de taux d'intérêt associé.

Rappel de cours EDO / EDS : pour discounter un flux financier entre la date du flux et aujourd'hui, nous utilisons les discount-factors. Pour ce faire, nous utilisons l'équation différentielle suivante, où r(t) correspond au taux instantané, à une date future t. Dans cet exercice, les taux forwards instantanés sont considérés comme déterministes, c'est-à-dire connus à l'avance.

$$\frac{dB_t}{B_t} = r(t).dt$$

En intégrant entre t et T nous obtenons :

$$B(t) = B(T).e^{-\int_t^T r(t')dt'}$$

$$B(t) = B(T) * DF(T \to 0)$$

Nous définissons ainsi $B(t,T) = \frac{B(t)}{B(T)} = DF(T \to t)$ comme étant le prix d'une obligation zero-coupon payant 1 à la maturité T, achetée à la date t. On peut alors définir le taux zero-coupon équivalent comme étant la moyenne des taux instantanés entre deux dates, de telle sorte que $B(t,T) = e^{-ZC(t,T)*(T-t)}$:

$$ZC(t,T) = \frac{1}{(T-t)} \cdot \int_t^T r(t')dt'$$

En pratique on ne raisonne qu'avec les taux zero-coupons équivalents.

De la même façon, on peut donner le taux zero-coupon forward y(t,T,S) qui correspond au taux annualisé entre les dates T et S, vue depuis t (on cherche le yield d'un bond zero-coupon de maturité S, et d'émission T) :

$$B(t,T \to S) = \frac{B(t,S)}{B(t,T)} = e^{-y(t,T,S)*(S-T)}$$

Attention : selon la convention on peut parfois utiliser des notations différentes.

Remarque : les taux instantanés peuvent également être considérés comme la dérivée mathématique de $-\ln\big(B(t,T)\big)$ par rapport à T :

$$\lim_{\delta \to 0} F(t,T,T+\delta) = \frac{-\partial \ln\big(B(t,T)\big)}{\partial T} = f(t,T)$$

Preuve : $y(t,T,T+\delta) = \frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}\right) = -\frac{\ln\big(B(t,T+\delta)\big)-\ln\big(B(t,T)\big)}{\delta} = -\frac{\partial \ln\big(B(t,T)\big)}{\partial T}$

Les discount-factors permettent ainsi d'exprimer des *Future Cash-Flows* à aujourd'hui.

Fonctions d'interpolation sur une courbe de taux

Une courbe « calibrée » représente un set de taux *Zero-Coupons* à des dates futures. Lorsque l'on souhaite obtenir le taux associé à une maturité qui n'est pas une date de calibration, il faut alors procéder à une interpolation. Il en va de même pour l'interpolation sur les surfaces de volatilité. Différentes méthodes existent.

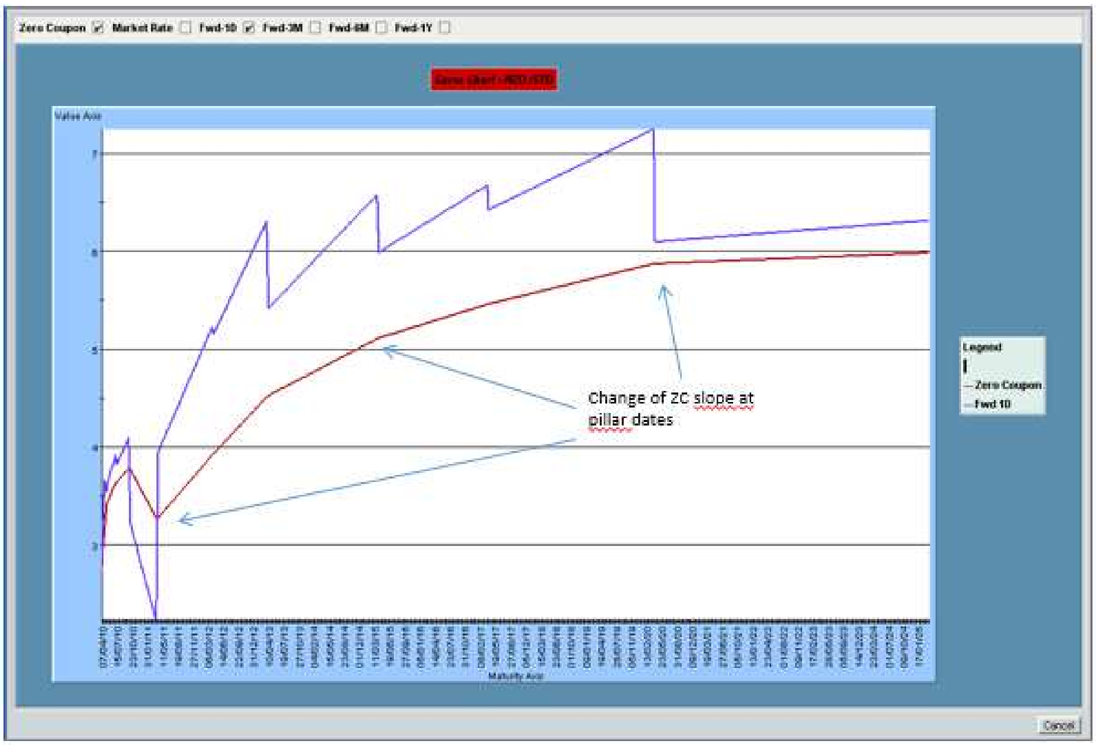
L'interpolation linéaire

Cette première est la plus simpliste que l'on puisse réaliser. Il suffit de relier les piliers entre eux par des segments de droites.

$$ZC_i(t) = \frac{t - t^-}{t^+ - t^-} ZC_c(t^+) + \frac{t^+ - t}{t^+ - t^-} ZC_c(t^-)$$

Cependant cette interpolation n'est pas idéale :

- La ZC-curve n'est pas C infinie (non dérivable aux dates de calibration)
- La courbe de forward n'est pas stable du tout permettant des arbitrages



L'interpolation spline

Ces méthodes sont très utilisées dans l'industrie (financière, robotique…) car elles permettent d'obtenir des courbes C². On part du postulat que la courbe d'interpolation est C², polynomiale (de degré 3) par morceau, puis en déroulant les équations on trouve l'ensemble des contraintes en résolvant un système matriciel.

Entre deux dates de calibration t_i et t_{i+1}, chaque Spline peut s'écrire ainsi :

$$p_i(x) = f_i + f_i'(t - t_i) + \frac{f_i''}{2!}(t - t_i)^2 + \frac{f_i'''}{3!}(t - t_i)^3$$

On écrit ce polynôme sous forme de Taylor pour interpréter aisément les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 :

$$p_i(t_i) = f_i$$
$$p_i{}'(t_i) = f_i{}'$$
$$p_i{}''(t_i) = f_i{}''$$
$$p_i{}'''(t_i) = f_i{}'''$$

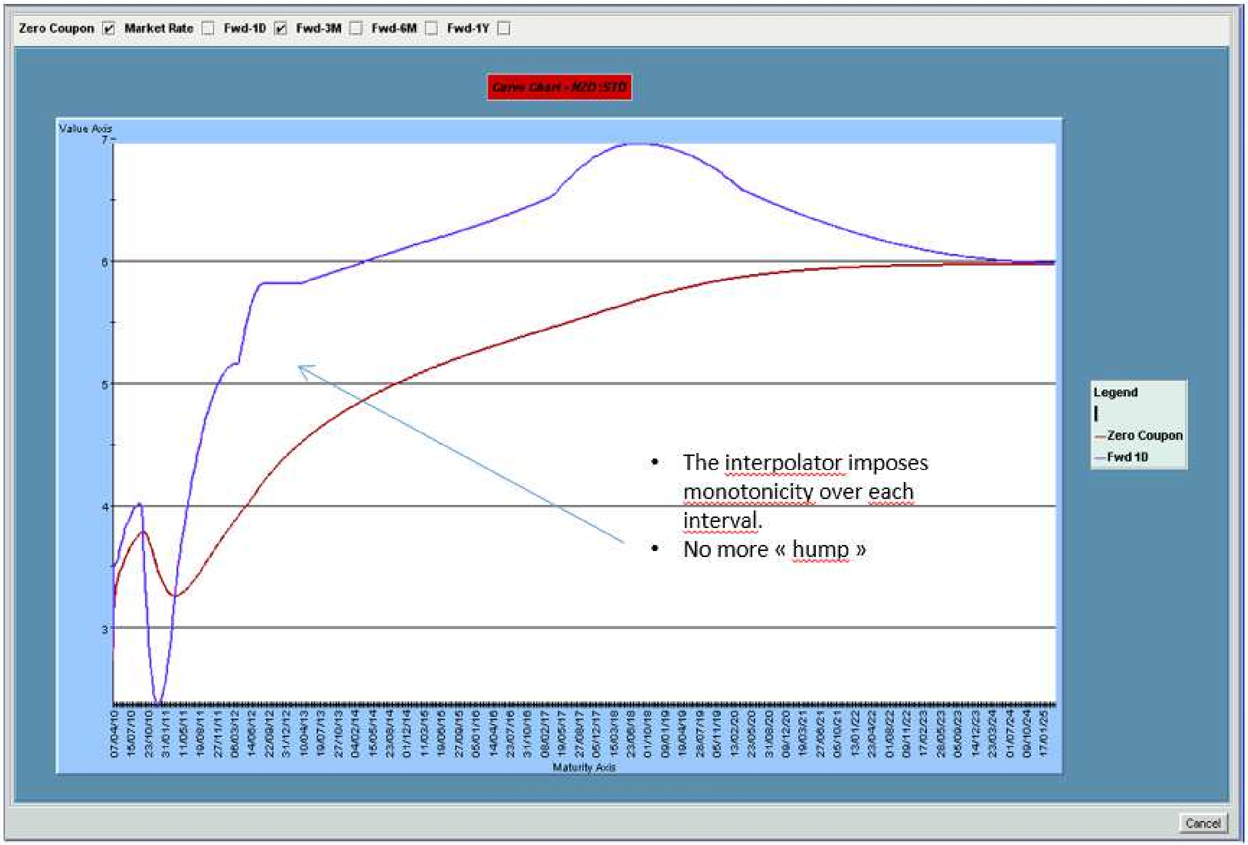
Comme la spline doit-être C², nous devons avoir :

$$p_{i+1}{}''(t_{i+1}) = p_i{}''(t_{i+1})$$
$$p_{i+1}{}'(t_{i+1}) = p_i{}'(t_{i+1})$$
$$p_{i+1}(t_{i+1}) = p_i(t_{i+1})$$

En ajoutant des conditions aux limites sur la dérivée seconde à gauche $p_1{}''(t_1)$ et à droite $p_n{}''(t_n)$ et en résolvant le système on trouve aisément les coefficients de chaque spline. En revanche les splines ne sont pas très « locales » c'est-à-dire que les points sont tous inter-dépendants et on risque de se retrouver avec une courbe un peu trop smoothée.

L'interpolation monotone-convexe

Pour information, [l'interpolation Monotone-Convexe]() Surement la méthode la plus utilisée car elle permet d'avoir de belles courbes de taux-forwards (smooth-forward), et ne sera pas détaillée dans ce cours (cf lien pour plus d'information).



Dans ce cours nous allons par simplicité considérer toutes les interpolations linéaires.

Calibration des courbes de taux

La méthode générale

Le but est de trouver une courbe de Zero Coupons depuis un set d'instruments et de leurs Market Quotes (i.e. le prix des instruments de taux d'intérêt côté sur le marché).

Dans la première partie du cours nous avons vu comment déterminer le taux zero-coupon associé à un instrument. Ce taux correspond au TRI (ou yield) qui permet d'annuler la valeur de marché de l'actif.

Pour annuler le PL d'un Loan, il faut que le taux ZC soit égal à :

$$ZC(T) = -\frac{1}{T1} \cdot \ln\left(\frac{1}{1 + LoanPrice \cdot T1}\right)$$

En revanche, pour annuler le PL d'un FRA ou d'un Future de taux, il faut que le taux de FRA soit égal à :

$$LoanPrice = \frac{1}{S-T}\left(\frac{e^{-ZC(T)*T}}{e^{-ZC(S)*S}} - 1\right)$$

Et l'on peut trouver ZC(S) en résolvant l'équation uniquement si l'on connait ZC(T).

$$ZC(S) = \frac{\ln\left((1 + (S-T) * LoanPrice) * e^{ZC(T)*T}\right)}{S}$$

Si le ZC(T) n'est pas donné directement par un autre instrument, alors on utilise une méthode d'interpolation.

1- Définition du set d'instrument servant à calibrer la courbe de taux. L'ensemble des instruments doivent utiliser la même courbe
2- Expression du P&L de chaque instrument en fonction des ZCi (Zero Coupon Rates interpolés) de la courbe de taux
3- Projection des ZCi sur les ZCc (Zero Coupon Calibrés) de la courbe de taux
4- Expression des dérivées de chaque instrument en fonction des ZCc $\frac{\partial PL(i)}{\partial ZCc(j)}$ et obtention de la Jacobienne du système
5- Obtention de la matrice $\frac{\partial PL(i)}{\partial ZCc(j)}$
6- Résolution du système et obtention des zero-coupon calibrés
7- Obtention de la matrice $\frac{\partial ZCc(i)}{\partial MR(j)}$

Algorithmes de calibration des courbes de taux

Bootstrap algorithm

Possible lorsque la jacobienne est diagonale inférieure. Il s'agit donc de résoudre le système suivant :

$$\begin{matrix} PL1(ZC1) \\ \dots \\ PLN(ZC1, \dots, ZCN) \end{matrix} = 0$$

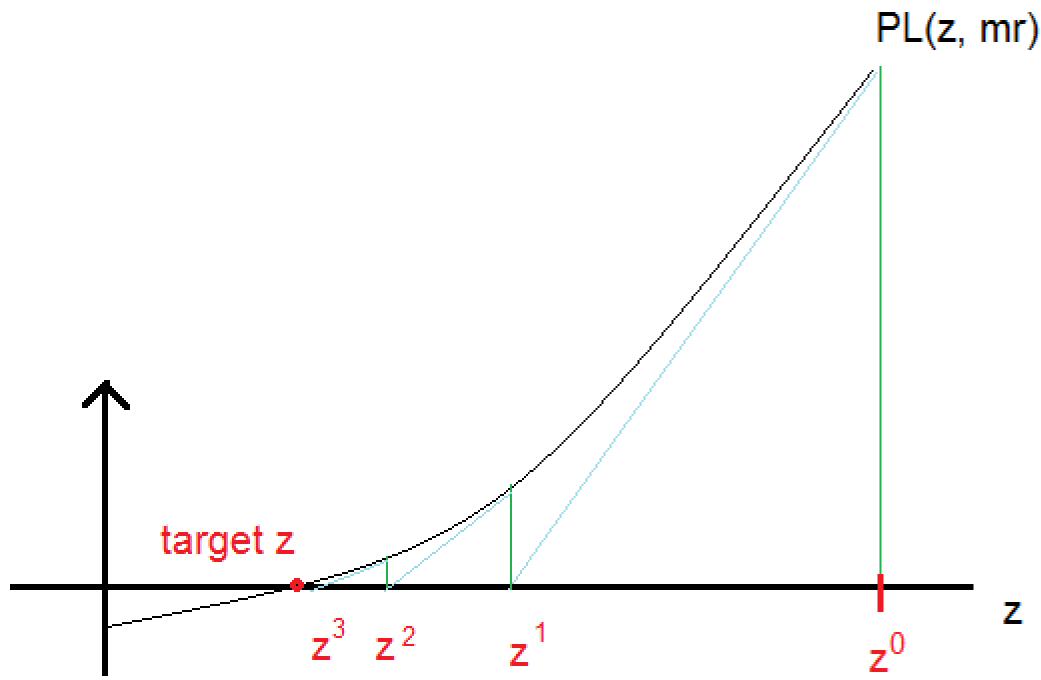
La méthode de bootstrap consiste donc à résoudre le système en commençant par la première équation et en terminant par la dernière équation.

Newton-Raphson multivarié

Pour les jacobiennes non triangulaires (cas classique des fonctions d'interpolations non-linéaires e.g. splines). Il s'agit de résoudre le système suivant :

$$\begin{matrix} PL1(ZC1, \dots, ZCN) \\ \dots \\ PLN(ZC1, \dots, ZCN) \end{matrix} = 0$$

<u>Illustration en 1 dimension (par exemple un Loan) :</u>



La formule de Taylor-Young nous indique : $f\left(z^{i+1}, mr\right) = f\left(z^{i}, mr\right) + \epsilon^{i}.f'\left(z^{i}, mr\right) + o(\epsilon^{2})$

On cherche donc $z^{i+1} = z^{i} + \epsilon^{i}$ de telle sorte que $f\left(z^{i+1}, mr\right) = 0$.

$$\Leftrightarrow f(z^{i+1}, mr) = f(z^{i}, mr) + \epsilon^{i}.f'(z^{i}, mr)$$

$$\Leftrightarrow \epsilon^{i} = -{f(z^{i}, mr)}\Big/{f'(z^{i}, mr)}$$

Dans le cas de fonction strictement monotones (et quelques autres critères supplémentaires) on converge vers le taux zero-coupon équivalent des instruments de taux linéaires en (en général) moins de 4 itérations.

Risques de l'algorithme de Newton-Raphson :

- Ne pas converger
- Convergence très doucement (plus de 4 itérations)
- Convergence vers une valeur incorrecte

➔ Faire l'exercice manuellement et itérer 4 fois pour trouver le taux implicite du Loan donné en exercice.

<u>En N dimension (calibration d'une courbe complète) :</u>

On considère le vecteur des N zéro-coupons à calibrer $Z = (Z_1 \dots Z_N)^t$

On considère le vecteur des N prix d'instruments $MR = (MR_1 \dots MR_N)^t$

On considère le vecteur du PL des N instruments $PL = (PL_1 \dots PL_N)^t$

Pour tout j, on a $PL_j = f(Z, MR_j)$

On considère la jacobienne $J = \left(\frac{\partial PL_j}{\partial ZC_k}\right)_{j,k\in\{1..N\}}$ la dérivée de chaque instrument par rapport aux zéro-coupons à calibrer, et on procède de la même manière qu'en dimension 1. On part d'une graine aléatoire (e.g. Z=10%) et on itère sur l'algorithme de Newton-Raphson entre 3 et 4 fois afin de calibrer de manière parallèle l'ensemble des zéro-coupons.

$$Z^{i+1} = Z^i + \epsilon^i$$

$$\begin{pmatrix} PL(I1)^{i+1} = f_1\left(z_1^i + \epsilon_1^i,\ \dots, z_N^i + \epsilon_N^i,\ mr1\right) \\ PL(IN)^{i+1} = f_N\left(z_1^i + \epsilon_1^i,\ \dots, z_N^i + \epsilon_N^i, mrN\right) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_1\left(z_1^i,\ \dots, z_N^i,\ mr1\right) \\ f_N\left(z_1^i,\ \dots, z_N^i, mrN\right) \end{pmatrix} + J * \begin{pmatrix} \epsilon_1^i \\ \epsilon_N^i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1^i \\ \epsilon_N^i \end{pmatrix} = -J^{-1} * \begin{pmatrix} f_1\left(z_1^i,\ \dots, z_N^i,\ mr1\right) \\ f_N\left(z_1^i,\ \dots, z_N^i, mrN\right) \end{pmatrix}$$

- ➔ Faire l'exercice manuellement et itérer 4 fois pour trouver le taux implicite du Loan et du Future donné en exercice en inversant la Jacobienne d'ordre 2.

La Jacobienne dZ/dR et théorème des fonctions implicites

Théorème : les zero-coupons calibrés sont une fonction des market rates.

Preuve par le théorème des fonctions implicites : Soit f une fonction de classe C^p (avec p > 0) définie sur un ouvert U de R2 et à valeurs dans R. Soit (x_0, y_0) un point de U tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que la dérivée partielle de f, par rapport à la deuxième variable, ne soit pas nulle en (x_0, y_0). Il **existe** une fonction réelle ϕ de classe C^p, définie sur un intervalle ouvert réel W contenant x_0, et un voisinage ouvert V de (x_0, y_0) dans U ∩ (W × R), tels que l'équivalence suivante soit vraie :

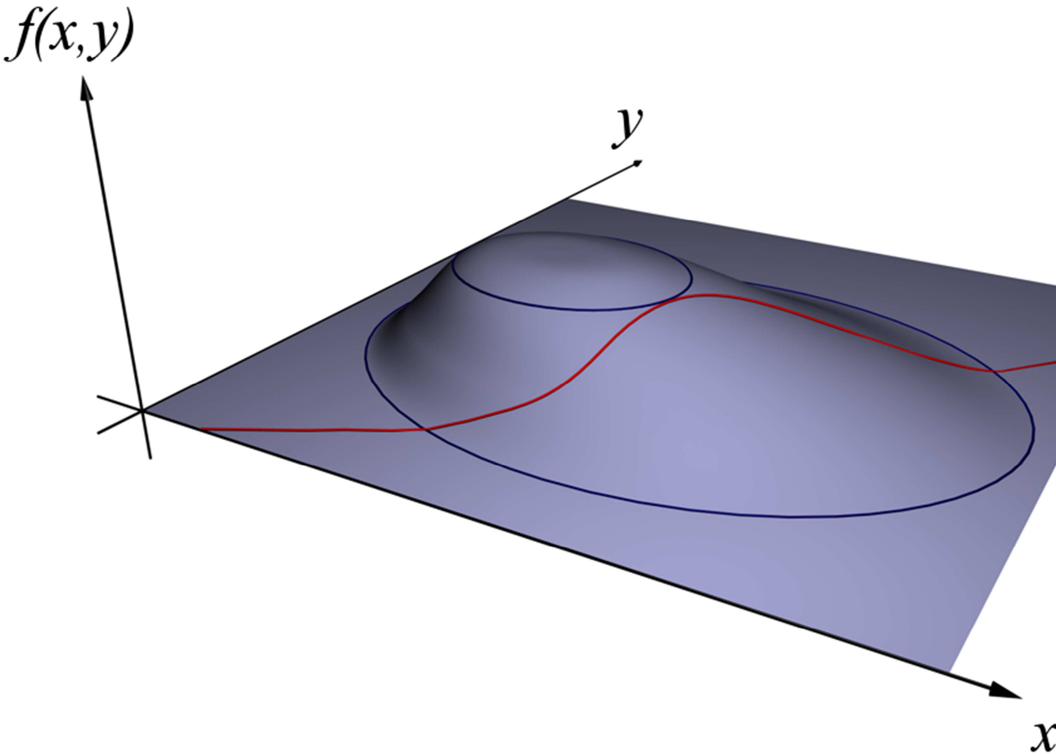
$$\forall (x,y) \in V \quad f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = y$$

La condition $\phi(x_0) = y_0$ n'est pas explicitée car elle n'est qu'un cas particulier de l'équivalence. En revanche, la dérivée de ϕ au point x_0 est connue et donnée par la formule :

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{d\phi(x)}{dx}(x_0) = -\frac{\partial F}{\partial X}(x_0, y_0) * \frac{\partial F}{\partial Y}^{-1}(x_0, y_0)$$

Preuve : au voisinage de (x_0, y_0) :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial X}(x_0, y_0) * dX + \frac{\partial F}{\partial Y}(x_0, y_0) * dY = 0$$



Ainsi :

$$\forall (ZC, MR) \in V \quad PL(ZC, MR) = 0 \Leftrightarrow \exists!\, \phi \; tq \; ZC = \phi(MR)$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial ZC}{\partial MR}(ZC_0, MR_0)\right)_{1<i,j<n} = -\frac{\partial F}{\partial ZC}^{-1}(ZC_0, MR_0) * \frac{\partial PL}{\partial MR}(ZC_0, MR_0)}$$

Cette matrice est capitale pour la projection du risque, et s'appelle Jacobienne dZ/dR.

La démonstration en multivarié n'est pas donnée.

Le framework multi-curve

Lecture des articles et discussion

Utiliser les bonnes courbes de taux permet de gagner des milliards :

- OIS discounting - The price is wrong
- Goldman and the OIS gold rush : how fortunes were made from a discounting change

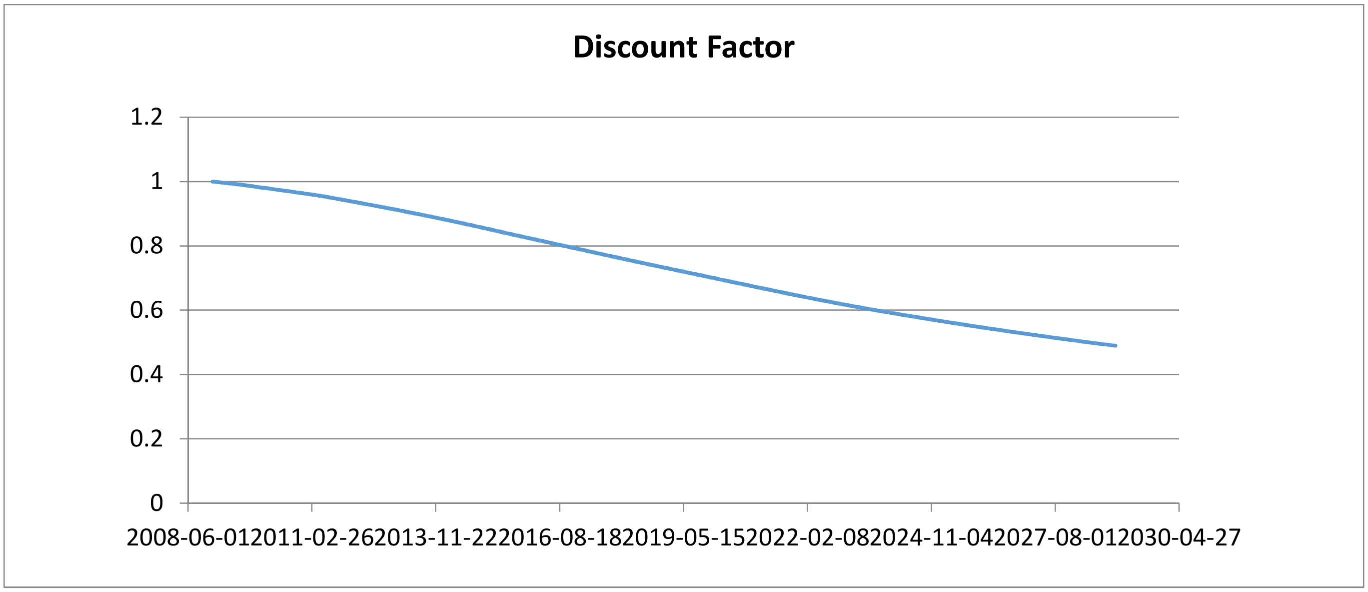
Courbes de discount versus courbes d'estimation

Pour évaluer les prix d'instruments de taux linéaire, nous avons besoin :

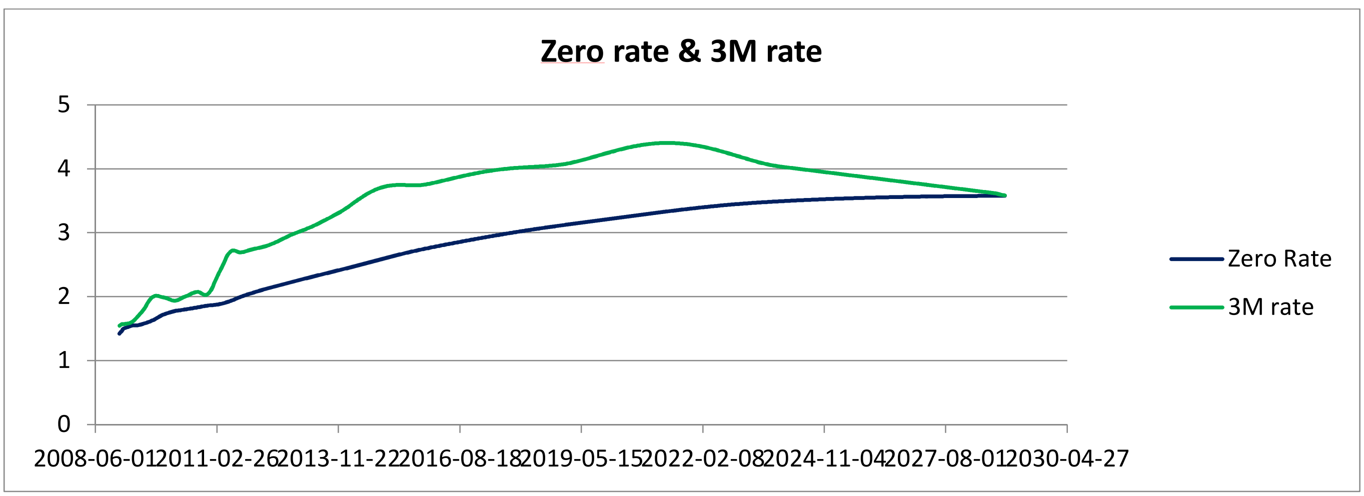
- De discounter les cash-flows
- D'estimer les taux forwards (LIBOR 3M, 6M, …)

Il est possible de créer à partir d'une courbe zéro-coupon, et vu d'aujourd'hui :

- Une courbe de discount factors en fonction de la maturité : $\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{t}) = \exp(-Z(t) * t)$



- Une courbe d'estimation des taux forwards $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}) = \left(\frac{DF(T_1)}{DF(T_2)} - 1\right)\frac{1}{T_2 - T_1}$



Le framework multi-courbe

Le setup pre-crise : une seule et unique courbe, construite à partir des instruments les plus liquides :

- Deposits 1W/1M/2M pour le court terme
- Futures & FRA sur le forward 3M pour le moyen terme
- Swaps 6M pour le long terme

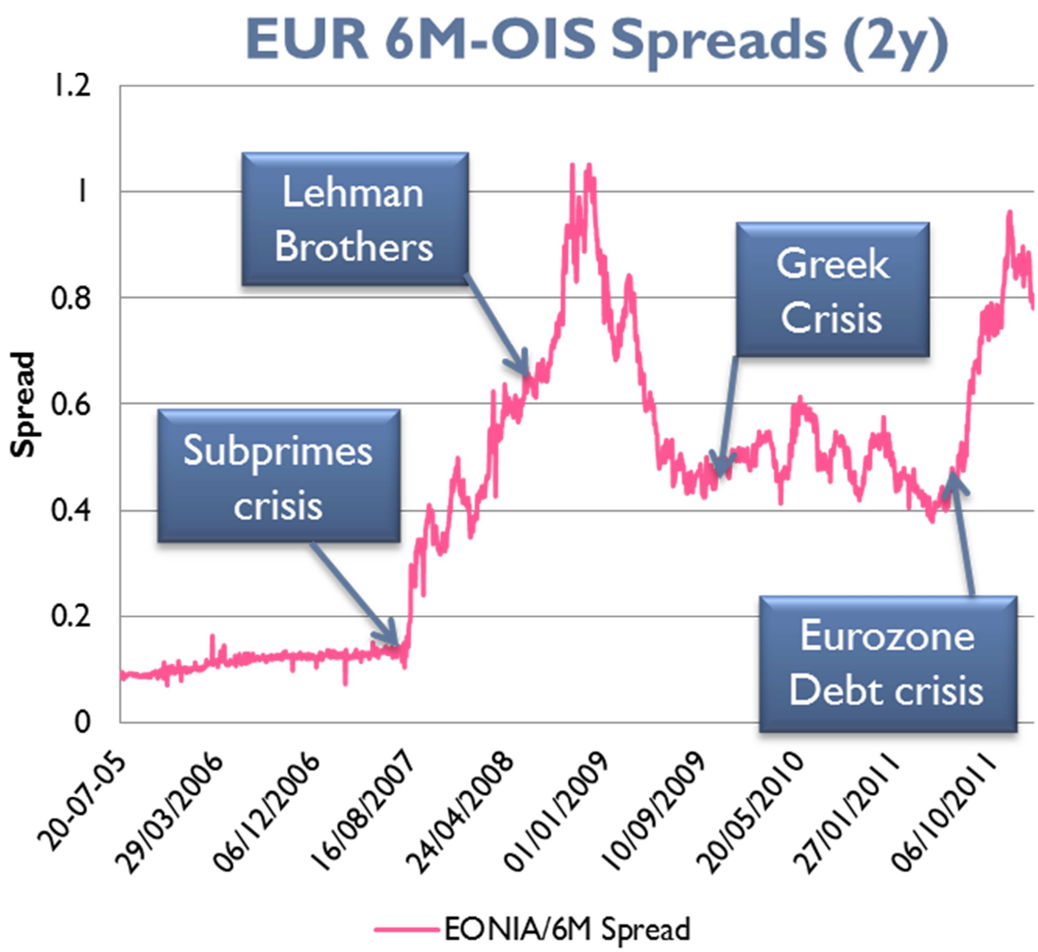
Cette unique courbe référençait ainsi plusieurs taux, utilisée à la fois pour l'estimation de tous les taux LIBORS et pour le discount.

De nombreuses courbes LIBOR

En 2008, en raison de la crise de liquidité, il est devenu beaucoup plus risqué de prêter une fois 1 M d'EUR sur 6 mois que sur deux fois 3 mois. Le marché inter-bancaire a commencé à prendre en compte le risque de crédit et le risque de contrepartie. Les basis-spreads (prix des basis swaps, entre le LIBOR 3M et le LIBOR 6M dans cet exemple) ont considérablement augmentés. Les basis-spreads sont influencés par :

- Le risque de crédit : est-ce que ma contrepartie sera toujours vivante dans 6 mois
- Le risque de liquidité : est-ce que je vais bientôt avoir besoin de liquidité et risque de ne pas pouvoir emprunter

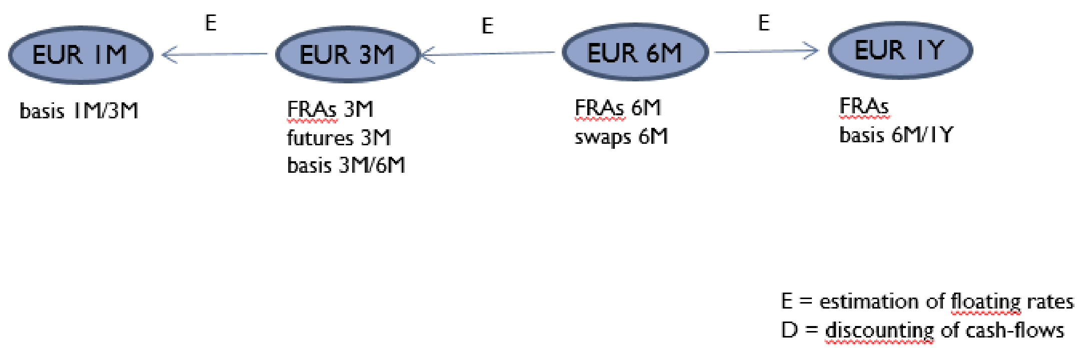
➔ Ainsi plus le prêt est long, plus le risque (et donc le taux) seront élevés.



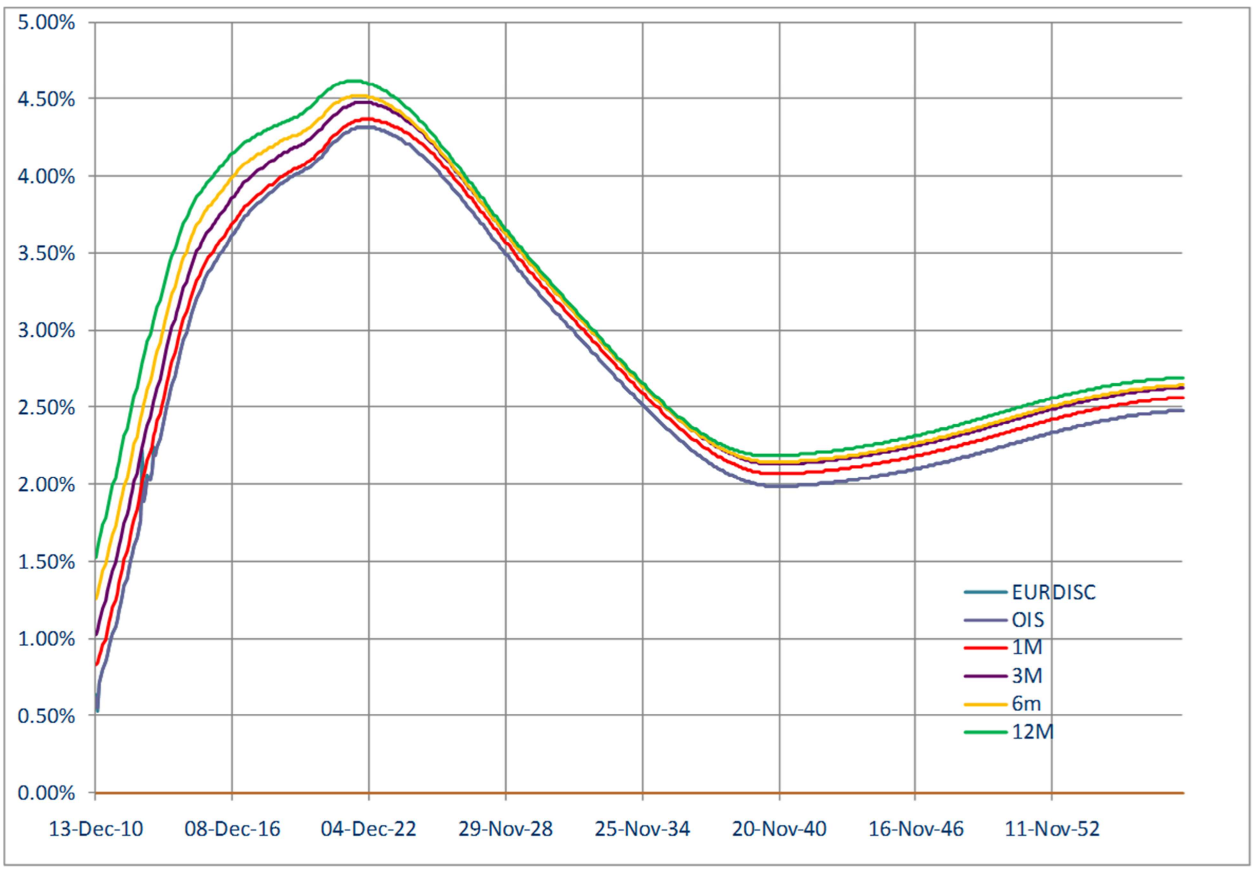
Ainsi les banques ont fait évoluer leurs structures IT de manière à pouvoir pricer une courbe de taux par maturité de LIBOR :

- Les instruments référençant un taux LIBOR ne sont utilisés que pour la maturité de leur courbe d'estimation

- Instruments utilisés : FRA, Futures, Swaps (liquides que pour le 6M), Basis-swaps (remarque : pas de loans)



On obtient ainsi un ensemble de courbes de taux qui seront utilisés pour discounter ou estimer les flux futures selon leurs caractéristiques propres.



L'OIS-discounting

Ainsi, pour estimer les flux flottants d'un swap, on utilisera la courbe LIBOR correspondante au taux flottant du Swap.

Mais quelle courbe utiliser pour discounter les cash-flows d'un Swap ?

- Il faut utiliser le « risk-free » rate
- …mais les courbes LIBOR et les courbes de trésorerie (taux de financement de la banque ne sont pas risk-free)
- …d'ailleurs, un swap interbank comporte-t-il du risque de crédit ? doit-on discounter de manière différente les swaps 3M des swaps 6M ?

➔ Pour bien répondre, il faut comprendre comment les trades sont financés.

Le risque de contrepartie

La parabole du stylo : si vous prêtez votre stylo à quelqu'un et qu'il disparait dans la nature, alors vous perdez votre stylo. Pour retrouver un stylo, il faut aller au (super) marché pour s'en procurer un nouveau. Le prix du nouveau stylo est ce que l'on appelle le coût de remplacement. C'est ainsi que l'on définit le risque de contrepartie. Lorsque vous prêtez un stylo, vous pouvez demander en échange une garantie temporaire équivalente au coût de remplacement : c'est ce qu'on appelle un appel de marge.

Lorsqu'une banque vous prête de l'argent pour un crédit immobilier, elle prend en garantie une hypothèque sur votre logement (dont la valeur est supérieure capital emprunté, c'est pour cela qu'un apport personnel de 10% est demandé). Ainsi vous avez intérêt à rembourser votre logement sans quoi vous perdez votre titre de propriété. Si la banque ne prend pas de garantie, alors elle se repose sur votre réputation, qui serait compromise en absence de remboursement.

Chambre de compensation

De la même manière, lorsque les banques rentrent dans des contrats financiers, des appels de marge sont échangés au quotidien dans deux cas :

- Le contrat est traité au travers un Exchange. Pour le traitement des appels de marge des Futures, les Exchanges sont adossés à des chambres de compensation qui permettent de réduire ce risque de contrepartie à zéro en demandant chaque soir des appels de marge permettant de réduire à zéro la Market-Value des encours.
- Lorsque le contrat dérivé est traité directement entre deux banques qui ont un accord de collatéral, alors les deux banques se mettent d'accord chaque soir sur le montant des appels de marge. Cela est plus compliqué à mettre en place pour les produits dérivé complexes, difficilement évaluables.

Les accords de collatéral : Credit Support Annex

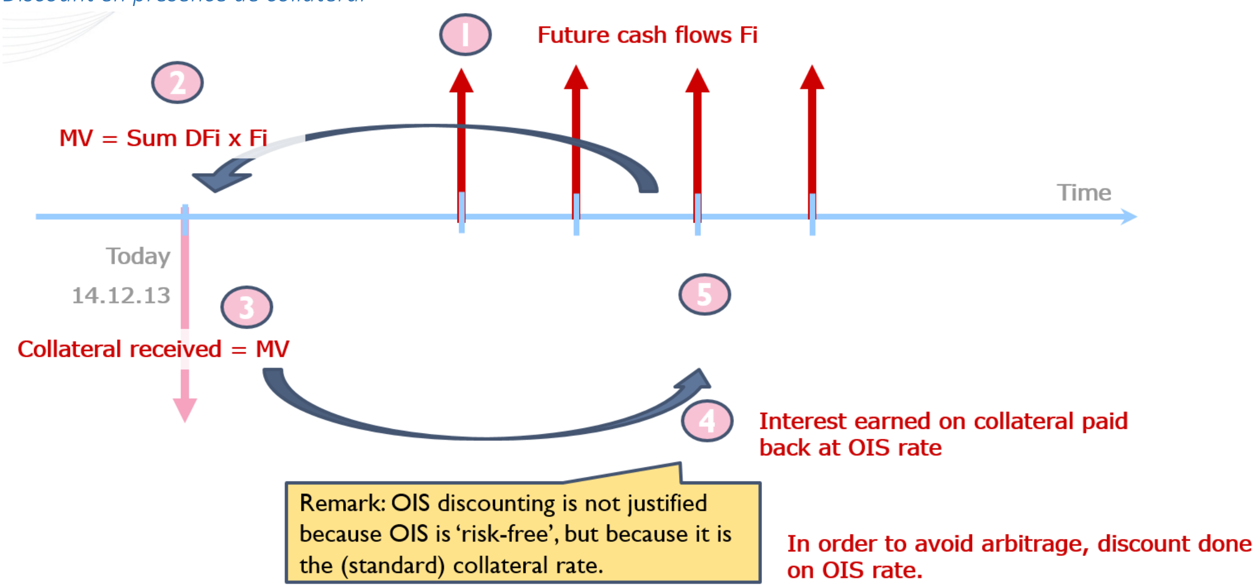
Un CSA ([Credit Support Annex]) est un document légal qui régule l'apport de collatéral pour les transactions sur les produits dérivés. C'est l'un des quatre documents qui compose un [ISDA Master Agreement]. Le CSA définit les termes et règles sous lesquelles le collatéral doit être posté (transféré entre deux contreparties afin de mitiger le risque de crédit lié aux positions « en dehors de la monnaie » (lorsqu'une des deux contreparties se trouve en situation de devoir de l'argent à l'autre à un moment futur).

Impact sur le pricing d'un swap

En général, les trades inter-bank sont sujet à des accords de collatéral. La contrepartie qui a une market value négative doit envoyer l'équivalent en cash, au jour le jour, à l'autre banque. L'autre contrepartie rémunère au taux sans-risque ce mouvement de cash, avec le taux OIS (au jour le jour, donc taux variable).

Ainsi le risque de contrepartie est annulé, et le taux de financement impacté.

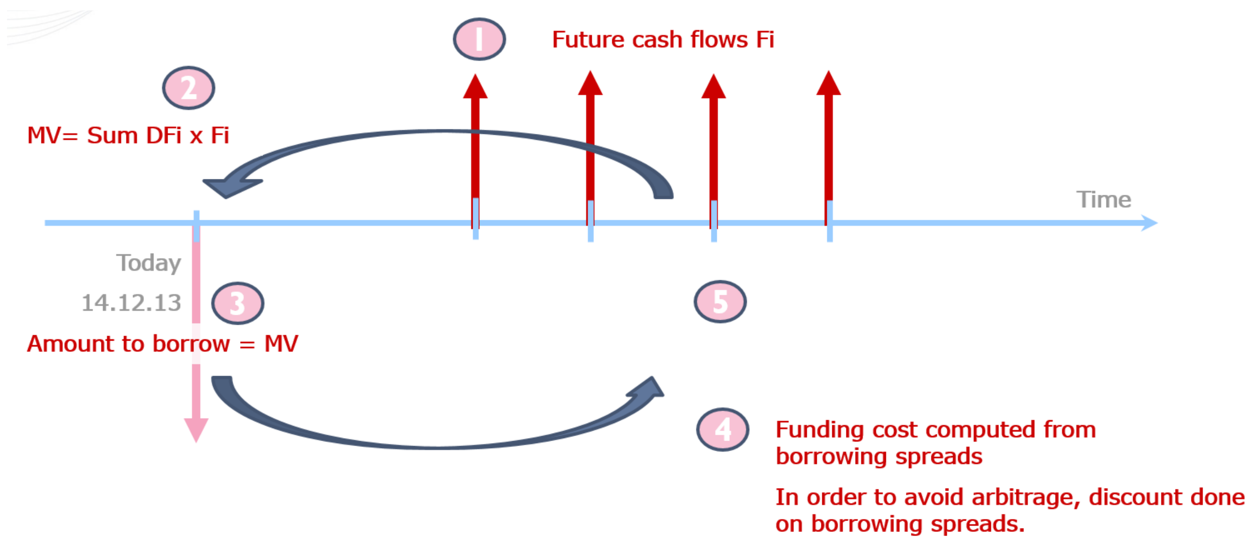
Discount en présence de collatéral



Pas besoin d'emprunter la market-value de la position, car elle a déjà été versée sous la forme de collatéral. Pour financer ce collatéral (payer les intérêts à l'autre banque) sans prendre aucun risque, il est possible de placer cet argent auprès de la banque central et de recevoir le taux de dépôt. Il est également possible de le prêter à une autre banque au taux OIS. Ainsi le coût de financement du collatéral est le taux OIS.

- ➔ Les positions collatéralisées doivent-être ainsi discountées au taux OIS.

Discount en l'absence de collatéral



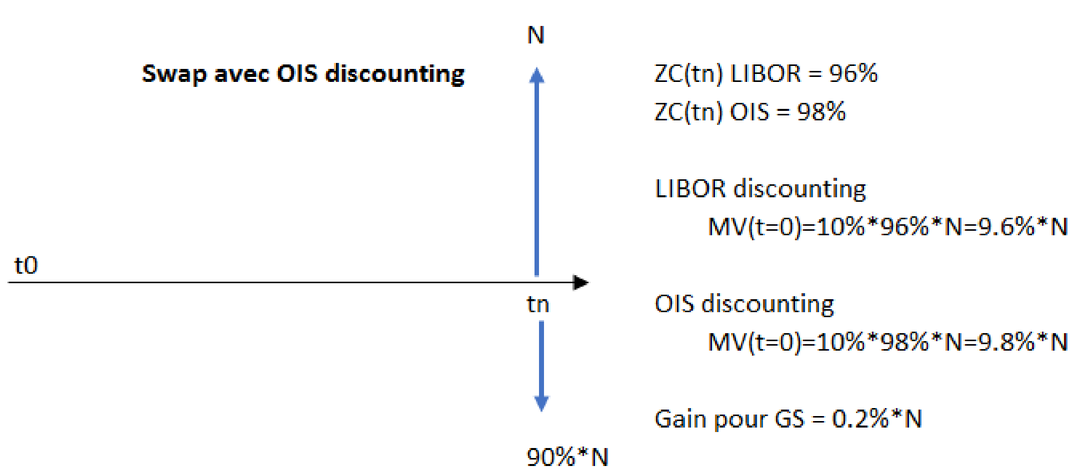
- L'argent n'est pas utilisable immédiatement. En cas de besoin, la banque doit donc emprunter sur les marché la market-value (financement de la market value) en attendant son versement.
- Cet emprunt se fait au taux de financement de la banque en fonction de la maturité de chaque cash-flow

➔ Les positions non-collatéralisées sont discountées au taux de financement de la banque (en général LIBOR+SPREAD.

<u>Note : qu'est-ce que le taux de financement interne d'une banque</u>

Ce type de courbes est construit avec les instruments grâce auxquels la banque ou l'institution financière se finance (emprunt auprès d'une autre banque à court terme, émission de Bonds ou de dette structurée pour financer les projets long-terme). Pour cela on peut aussi utiliser des instruments fictifs (loans) représentant le Cout Moyen Pondéré du Capital pour diverses dates dans le futur ou encore ajouter une structure par terme d'un Spread à ajouter à la courbe Libor.

Switch to OIS discounting : l'affaire Goldman-Sachs illustré par le SWAP sur EURIBOR3M avec collatéral



➔ Faire le dessin en différenciant les flux d'estimation et les flux de discount.

➔ Le PL du basis-swap est-il toujours nul dans un framework multi-curve ?

Pricing des swaps en multi-courbe

Pricing d'un swap fix/floating de maturité 2Y payant des flux tous les 6 mois.

					JAMBE FLOTTANTE	**JAMBE FIXE / TAUX FIXE**	vérification **JAMBE FIXE**
Années	# flux	Taux 6M	Discount Factor M	Taux forward F(Ti, Ti+1)	Tfwd * Nominal * deltaTemps * DF(OIS)	N * 0.5 * DF(OIS)	
		Interpolé de la courbe EURIBOR 6M	1	-	-	-	
0.5	flux 1	1.00%	0.995012479	1.00%	4,962.65 €	495,024.92 €	12,927.08 €
1	flux 2	2.00%	0.980198673	3.02%	14,813.81 €	490,099.34 €	12,798.45 €
1.5	flux 3	2.50%	0.963194418	3.53%	17,132.27 €	485,222.77 €	12,671.10 €
2	flux 4	2.60%	0.949328867	2.92%	14,032.94 €	480,394.72 €	12,545.02 €
				Total jambe flottante =	**50,941.66 €**	1,950,741.74 €	**50,941.66 €**

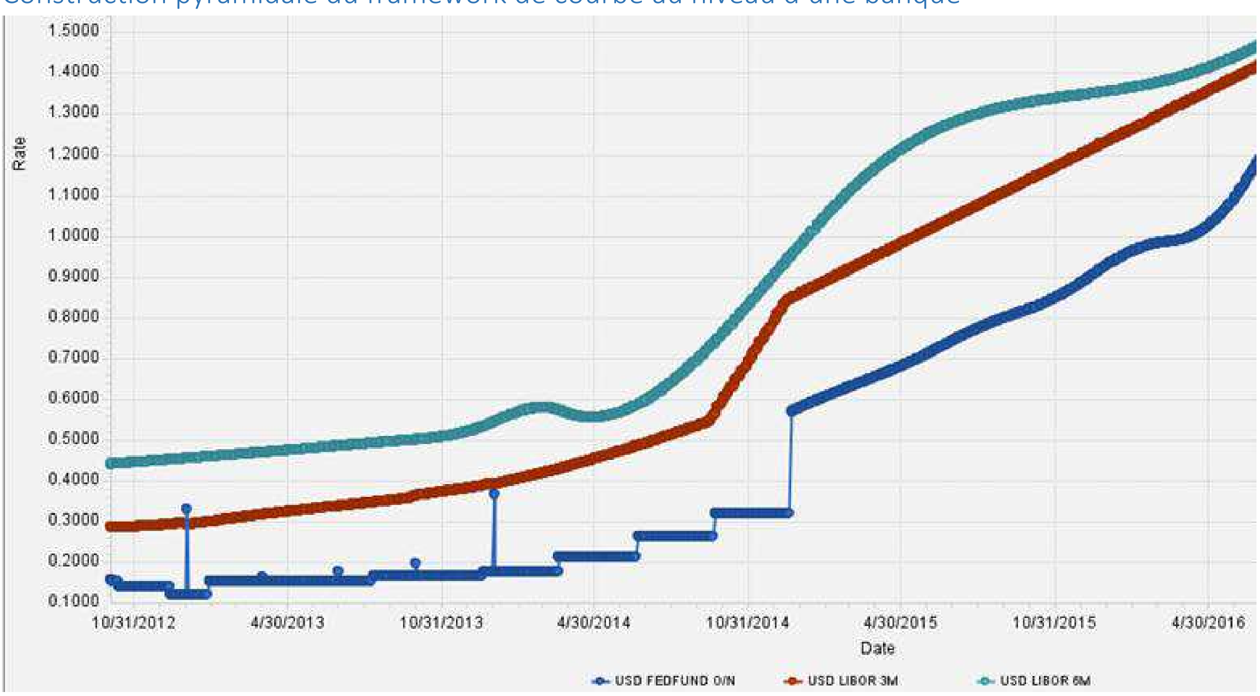
On cherche TAUX FIXE tel que JAMBE FLOTTANTE = JAMBE FIXE
TAUX FIXE = JAMBE FLOTTANTE / (JAMBE FIXE / TAUX FIXE)
TAUX FIXE = 2.61%

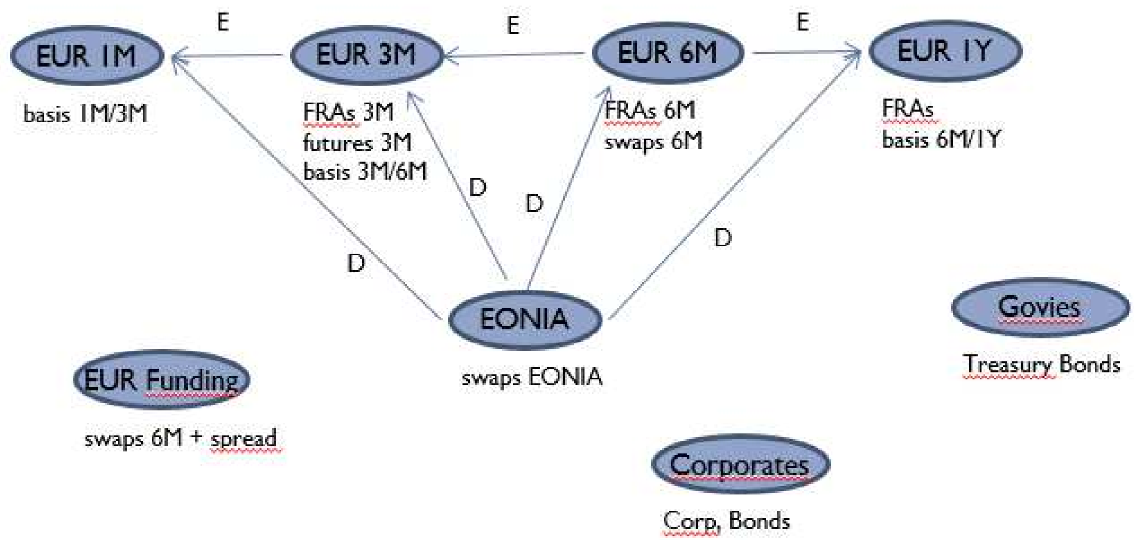
En multipliant JAMBE FIXE / TAUX FIXE par le TAUX FIXE
on vérifie que les flux discountés à t=0 de la jambe fixe soient bien égaux à ceux de la jambe flottante.

Discount : les autres cas

Case			**Discount Curve**
single-currency CSA (paying OIS)	cash-flow ccy = collateral ccy		OIS curve of cash-flow currency
	cash-flow ccy <> collateral ccy	collateral in USD FF	FX Basis curve of cash-flow currency (assuming FX Basis is quoted vs. USD)
		other collateral	Implied cross-currency collateral curve
multi-ccy CSA (paying OIS)			Implied cheapest-to-deliver collateral curve
no CSA (unsecured funding)	cash-flow ccy = funding ccy		Own external funding curve
	cash-flow ccy <> funding ccy		Implied cross-currency funding curve

Construction pyramidale du framework de courbe au niveau d'une banque





1) Construction des courbes OIS (EONIA pour l'EUR)
2) Construction des courbes IBOR (1M, 3M, 6M, 1Y) en discomptant les flux des instruments collatéralisés au taux OIS, et en estimant les flux futurs avec les courbes correspondantes.
3) Construction de la courbe de financement réel de la banque (boulot du desk de trésorerie) avec des « faux » instruments répliquant la stratégie de financement de la banque
4) Eventuellement, construction des courbes Govies et Corporate, qui ont de manière inhérente un spread de risque de crédit (e.g. High Yield).

Evaluation du risque de taux (non-abordé ?)

Présentation et calcul de la DV01_par

On définit la DV01_zero en projetant le risque sur les ZC calibrés en multipliant par les dZ/dR :

$$dMV = \sum_{\substack{Courbes\ X \\ Points\ i}} \frac{\partial MV}{\partial ZC_{int}(X,i)} dZC_{int}(X,i)$$

$$dZC_{int}(X,i) = \sum_{Points\ j} \frac{\partial ZC_{int}(X,i)}{\partial ZC_c(X,j)} dZC_c(X,j)$$

$$dZC_c(X,j) = \sum_{\substack{Courbes\ Y \\ Points\ k}} \frac{\partial ZC_c(X,j)}{\partial ZC_c(Y,k)} dZC_c(Y,k)$$

$$dZC_c(Y,k) = \sum_{Points\ l} \frac{\partial ZC_c(Y,k)}{\partial MR(Y,l)} dMR(Y,l)$$

Ainsi, par application de la chain-rule (théorème de dérivation des fonctions composées) :

$$dMV = \sum_{\substack{Courbes\ X \\ Points\ i}} \frac{\partial MV}{\partial ZC_{int}(X,i)} \sum_{Points\ j} \frac{\partial ZC_{int}(X,i)}{\partial ZC_c(X,j)} \sum_{\substack{Courbes\ Y \\ Points\ k}} \frac{\partial ZC_c(X,j)}{\partial ZC_c(Y,k)} \sum_{Points\ l} \frac{\partial ZC_c(Y,k)}{\partial MR(Y,l)} dMR(Y,l)$$

$$dMV = \sum_{\substack{Courbes\ X \\ Points\ i}} \sum_{Points\ j} \sum_{\substack{Courbes\ Y \\ Points\ k}} \sum_{Points\ l} \frac{\partial MV}{\partial ZC_{int}(X,i)} \cdot \frac{\partial ZC_{int}(X,i)}{\partial ZC_c(X,j)} \frac{\partial ZC_c(X,j)}{\partial ZC_c(Y,k)} \frac{\partial ZC_c(Y,k)}{\partial MR(Y,l)} dMR(Y,l)$$

$$dMV = \sum_{\substack{Courbes\ X \\ Points\ i}} \sum_{Points\ j} \sum_{\substack{Courbes\ Y \\ Points\ k}} \sum_{Points\ l} \frac{\partial MV}{\partial ZC_{int}(X,i)} \cdot \frac{\partial ZC_{int}(X,i)}{\partial ZC_c(X,j)} \frac{\partial ZC_c(X,j)}{\partial ZC_c(Y,k)} \frac{\partial ZC_c(Y,k)}{\partial MR(Y,l)} dMR(Y,l)$$

$$\boxed{\frac{dMV}{dMR(Y,l)} = \sum_{\substack{Courbes\ X \\ Points\ i}} \sum_{Points\ j} \sum_{Points\ k} \frac{\partial MV}{\partial ZC_{int}(X,i)} \cdot \frac{\partial ZC_{int}(X,i)}{\partial ZC_c(X,j)} \frac{\partial ZC_c(X,j)}{\partial ZC_c(Y,k)} \frac{\partial ZC_c(Y,k)}{\partial MR(Y,l)}}$$

C'est ce que l'on appelle la DV01_par, ou la sensitivité d'un trade aux market rates des courbes de taux. Pour hedger un book, il faut que cette valeur soit nulle ; cela se passe en pratique par l'achat des produits de taux linéaires servant à calibrer les courbes de taux.

Diffusion de modèles de taux – non abordé

Modèle de Black76

La volatilité est supposée constante.

Modèle de Vasicek

Cf Devoir Surveillé : modèle de diffusion des taux courts (taux forwards instantannés) avec retour à la moyenne.

Libor Market Model

Modèle de diffusion des taux forwards, plus réaliste des déformations réelles du marché.