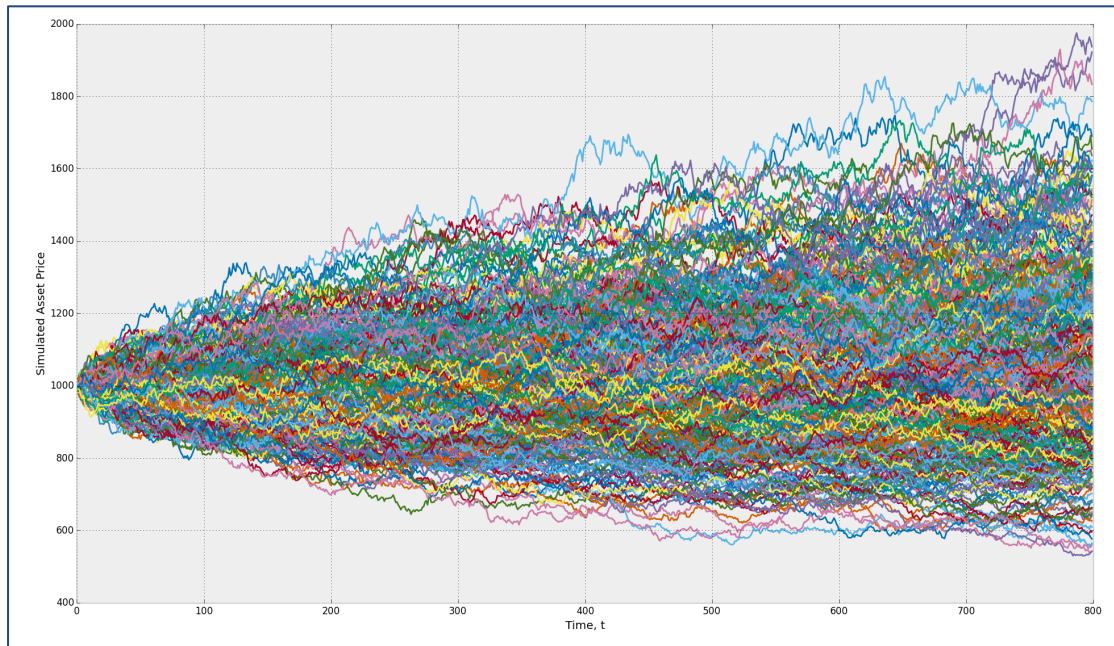


Introduction au calcul stochastique - Évaluation de produits dérivés par méthode de Monte-Carlo



Asset prices Simulated using Geometric Brownian Motion

Sommaire

INTRODUCTION.....	3
I/ DECOUVERTE DE LA METHODE DE MONTE-CARLO	4
RAPPELS DE PROBABILITE	4
BASES FINANCIERES – LES SIX PRINCIPALES CLASSES D’ACTIFS ET LES PRODUITS DERIVES	4
BASES FINANCIÈRES : TIME VALUE OF MONEY.....	4
ESTIMATEURS DE MONTE-CARLO.....	4
GENERATEUR PSEUDO-ALEATOIRES ROBUSTES	6
APPLICATION NUMERIQUE : CALCUL DE PI PAR METHODE DE MONTE-CARLO.....	7
II/ SIMULATION DE VARIABLES ALEATOIRES ET PRICING D’UNE OPTION EUROPEENNE PAR SIMULATION	8
CONTROLE SURPRISE	8
DECOUVERTE DE DEUX PRODUITS DERIVES : LES FUTURES ET LES OPTIONS EUROPEENNES	8
PROCESSUS STOCHASTIQUES, FILTRATIONS ET MARTINGALES.....	8
<i>Mouvement brownien géométrique et équation différentielles stochastiques : un premier modèle d’évolution du cours de bourse.</i>	<i>9</i>
TECHNIQUES D’ECHANTILLONNAGE DE LA LOI NORMALE PAR METHODE DE LA TRANSFORMEE INVERSE.....	10
PRESENTATION DES OPTIONS EUROPEENNES.....	13
REVISION PAR ANTICIPATION DE L’EQUATION DE BLACK-SCHOLES.....	13
ACTIVITE : VERIFIER LA CONVERGENCE DU CALCUL D’OPTION EUROPEENNES PAR SIMULATION EN DONNER UN INTERVALLE DE CONFIANCE A 95% DU PRIX ESTIME.	13
III/ MISE EN PLACE DES METHODES DE REDUCTION DE VARIANCE.....	13
UNE PREMIERE METHODE DE REDUCTION DE VARIANCE : LES VARIABLES ANTITHETIQUES.....	13
ACTIVITE : VERIFIER LA CONVERGENCE DU CALCUL D’OPTION EUROPEENNES PAR SIMULATION DANS LE CADRE CLASSIQUE, PUIS EN IMPLEMENTANT LA METHODE DE REDUCTION DE VARIANCE DES VARIABLES ANTITHETIQUES.	14
IV/ APPLICATION AUX OPTIONS AMERICAINES	14
PRICING D’OPTIONS BERMUDIEN	14
PRICING D’OPTIONS AMERICAINES.....	15
TD3 : EVALUATION D’UN PUT BERMUDIEN SIMPLE PAR METHODE DE LONGSTAFF & SCHWARTZ.	18
RESULTATS ELEMENTAIRES SUR LES OPTIONS AMERICAINES :	18
TD5 : PRICER D’OPTION AMERICAINES.....	19
V/ LE MODELE DE MERTON : UNE PREMIERE APPROCHE DU RISQUE DE CREDIT.	19
PRESENTATION DU MODELE ET DE LA NOTION DE DEFAULT	19
SIMULATION PAR MONTE-CARLO D’OBLIGATIONS EN PRESENCE DE RISQUE DE CREDIT.....	19
VI/ ANNEXES	19
REVISION PAR ANTICIPATION DE L’EQUATION DE BLACK-SCHOLES.....	19
REVISION PAR ANTICIPATION : CALCUL DE LA VALEUR DE MARCHE D’UNE OPTION CALL-EUROPEEN, APPELEE FORMULE (ET NON PAS EQUATION !) DE BLACK-SCHOLES	20
L’ALGORITHME DE WINCHMAN-HILL (ÉQUIVALENT ALEA() DE EXCEL)	22
L’ALGORITHME PPND16 (EQUIVALENT LOI.NORMALE.INVERSE() DE EXCEL).....	22

Introduction

De nombreux problèmes en physique et en finance sont décrits par des équations d'évolution qui impliquent plusieurs paramètres, e.g. l'équation de la chaleur ou l'équation de Black-Scholes:

$$(1) D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t)$$

$$(2) \frac{\partial V}{\partial t} + Sr \frac{\partial V}{\partial S} + S^2 \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r \cdot V(S, t)$$

Le cas de l'équation de Black-Scholes est un des rares cas où l'on peut obtenir une résolution analytique (équation similaire à l'équation de la chaleur). Cependant lorsque les actifs dépendent de plus d'un paramètre, il devient extrêmement difficile de trouver des solutions analytiques. On a donc par la suite utilisé des grilles de résolution temporelles afin de pouvoir discrétiser l'ensemble des paramètres et résoudre numériquement les équations différentielles stochastiques. Cependant la complexification constante des payoffs rend l'évaluation de ces nouveaux produits très coûteuse et le paramétrage des grilles de discrétisations très compliqué. L'essor récent des marchés de produits complexes, la mise en place de réformes comptables IAS/IFRS qui demande aux banques d'évaluer leurs actifs risqués à juste-valeur et l'entrée en vigueur des directives réglementaires Bâle II et Solvabilité II dans les banques et les sociétés d'assurance ont démocratisé l'utilisation des méthodes de Monte Carlo, qui est une méthode très couramment utilisée aujourd'hui pour l'évaluation de produits dérivés.

Au travers ce cours, nous allons

1. Découvrir en quoi consiste la méthode de Monte-Carlo. Cette méthode nécessitant de la simulation numérique, il faudra identifier un générateur pseudo-aléatoire uniforme rapide et robuste pour pouvoir simuler des variables aléatoires les plus aléatoirement possible, et proposer une technique d'échantillonnage de la loi normale adaptée aux contraintes calculatoires de la simulation numérique intensive.
2. Utiliser cette nouvelle technique pour pricer des produits financiers simples, et évaluer la convergence et l'efficacité du MC en fonction du nombre de scénarios calculés. Des rappels de calcul stochastique seront fait en cours.
3. Mise en place et approfondissement des techniques de réduction de variance (au moins la technique des variables antithétiques devra être appliquées) et confrontation de la puissance calculatoire nécessaire avec et sans ces méthodes.
4. Mise en place l'ensemble des éléments de cours pour construire un pricer (ou bien améliorer un algo VBA simple fourni) pour évaluer les primes d'option américaines d'après l'algorithme de Longstaff & Schwartz pour des options Américaines.
5. Évaluer des obligations à coupon annuel par Monte-Carlo adapté aux matrices de transition Markovienne.

Vous utiliserez le logiciel de votre choix pour mettre en œuvre les techniques de simulation, présentées sous un angle théorique dans la littérature spécialisée, afin d'implémenter un outil d'évaluation de produits dérivés.

I/ Découverte de la méthode de Monte-Carlo

Rappels de probabilité

- calcul de l'espérance et de la variance en discret et en continue
- application numérique avec un dé à 6 faces
- application numérique au loto (détail de la marge et transition vers la finance)

Bases financières – les six principales classes d'actifs et les produits dérivés

FX (marché de changes) / FI (bonds) / EQD (dérivées actions type options vanilles) / COM (crach-spreads oil & gas) / IRD (swap de taux, cap, floors) / CRD (subprimes)

Bases financières : Time value of Money

Si un contrat vous propose de gagner B euros à $t=T$, et en l'absence d'opportunité d'arbitrage (gain financier sans mise initiale), alors le prix de ce contrat à $t=0$ est :

$$B \cdot e^{-r \cdot T}$$

On appelle Discount Factor la quantité $e^{-r \cdot T}$ et Capitalisation Factor l'inverse de cette quantité : $e^{+r \cdot T}$

Estimateurs de Monte-Carlo

- attention : ne pas confondre le calcul de l'espérance et le calcul de l'estimateur de l'espérance

Nous cherchons l'espérance mathématique d'une fonction $g(X)$:

$$E[g(X)] = \int_{\Omega} g(x) f_X(x) dx$$

La loi des grands nombres procure est un estimateur sans biais de cette espérance que l'on appelle l'estimateur de Monte-Carlo.

$$\tilde{g}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i)$$

Théorème Centrale Limite: soit $\{X_1 \dots X_n\}$ une suite de N variable aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées de même loi X, d'espérance $E[X]$ et d'écart type σ_X . Le Théorème Centrale Limite nous renseigne sur la convergence de l'estimateur de Monte-Carlo

$$\sum_{i=1}^N X_i \rightarrow \mathcal{N}(N \cdot E[X], N \cdot \sigma_X^2)$$

Ou encore, par changement de variable :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathcal{N}\left(E[X], \frac{\sigma_X^2}{N}\right)$$

Que l'on peut réécrire:

$$\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i - E[X]}{\frac{\sigma_g}{\sqrt{N}}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Par transposition, nous trouvons que :

$$Z = \frac{\widetilde{g}_N - E[g(X)]}{\sigma_g/\sqrt{N}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Cherchons un intervalle de confiance pour Z :

$$\mathbb{P}[-z \leq Z \leq z] = \mathbb{P}[Z \leq z] - \mathbb{P}[Z \leq -z] = \phi(z) - \phi(-z)$$

On cherche z tel que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[-z \leq Z \leq z] &= 1 - \alpha \\ \phi(z) - \phi(-z) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Comme

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

On a :

$$\phi(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$z = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = z_{1-\alpha/2}$$

$z_{1-\alpha/2}$ est appelé quantile de la loi normale centrée réduite.

	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0	$-\infty$	-3.090	-2.878	-2.748	-2.652	-2.576	-2.512	-2.457	-2.409	-2.366
0.01	-2.326	-2.290	-2.257	-2.226	-2.197	-2.170	-2.144	-2.120	-2.097	-2.075
0.02	-2.054	-2.034	-2.014	-1.995	-1.977	-1.960	-1.943	-1.927	-1.911	-1.896
0.03	-1.881	-1.866	-1.852	-1.838	-1.825	-1.812	-1.799	-1.787	-1.774	-1.762
0.04	-1.751	-1.739	-1.728	-1.717	-1.706	-1.695	-1.685	-1.675	-1.665	-1.655
0.05	-1.645	-1.635	-1.626	-1.616	-1.607	-1.598	-1.589	-1.581	-1.572	-1.563
0.06	-1.555	-1.546	-1.538	-1.530	-1.522	-1.514	-1.506	-1.498	-1.491	-1.483
0.07	-1.476	-1.468	-1.461	-1.454	-1.447	-1.440	-1.433	-1.425	-1.419	-1.412
0.08	-1.405	-1.398	-1.392	-1.385	-1.379	-1.372	-1.366	-1.359	-1.353	-1.347
0.09	-1.341	-1.335	-1.329	-1.323	-1.316	-1.311	-1.305	-1.299	-1.293	-1.287
0.9	1.282	1.287	1.293	1.299	1.305	1.311	1.316	1.323	1.329	1.335
0.91	1.341	1.347	1.353	1.359	1.366	1.372	1.379	1.385	1.392	1.398
0.92	1.405	1.412	1.419	1.425	1.433	1.440	1.447	1.454	1.461	1.468
0.93	1.476	1.483	1.491	1.498	1.506	1.514	1.522	1.530	1.538	1.546
0.94	1.555	1.563	1.572	1.581	1.589	1.598	1.607	1.616	1.626	1.635
0.95	1.645	1.655	1.665	1.675	1.685	1.695	1.706	1.717	1.728	1.739
0.96	1.751	1.762	1.774	1.787	1.799	1.812	1.825	1.838	1.852	1.866
0.97	1.881	1.896	1.911	1.927	1.943	1.960	1.977	1.995	2.014	2.034
0.98	2.054	2.075	2.097	2.120	2.144	2.170	2.197	2.226	2.257	2.290
0.99	2.326	2.366	2.409	2.457	2.512	2.576	2.652	2.748	2.878	3.090

Table des $z = \phi^{-1}(p)$

Ainsi nous avons un intervalle de confiance de l'erreur pour une probabilité de $1 - \alpha$:

$$|e_n| \leq z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_g}{\sqrt{N}}$$

Nous avons ainsi un intervalle de confiance à 95% de l'estimateur de Monte-Carlo :

$$z_{1-\frac{5\%}{2}} = 1,96$$
$$-1,96 \frac{\sigma_g}{\sqrt{N}} \leq \widetilde{g}_N - E[g(X)] \leq 1,96 \frac{\sigma_g}{\sqrt{N}}$$

De manière équivalente, nous pouvons écrire :

$$\widetilde{g}_N - 1,96 \frac{\sigma_g}{\sqrt{N}} \leq E[g(X)] \leq \widetilde{g}_N + 1,96 \frac{\sigma_g}{\sqrt{N}}$$

Remarques importantes

- La convergence est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Ainsi, avec 100 fois plus de simulations, nous obtenons un estimateur seulement 10 fois plus précis ($N = 100M$) :

$$-1,96 \frac{\sigma_g}{10\sqrt{M}} \leq \widetilde{g}_N - E[g(X)] \leq 1,96 \frac{\sigma_g}{10\sqrt{M}}$$

- La variance de g est souvent inconnue et peut de la même manière être approximée par un estimateur de Monte-Carlo de la variance :

$$S^2_{g(X)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (g(x_i) - \widetilde{g}_N)^2 \rightarrow \text{Var}[g(X)] = \sigma_g^2 = E[(X - E[g(X)])^2]$$

Ce résultat provient du test de Student (en pratique pour $n \geq 10$) :

$$Z = \frac{\widetilde{g}_N - E[g(X)]}{S_g/\sqrt{N}} \rightarrow \text{loi Student de } n \text{ degré de liberté} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0,1)$$

- Il convient donc, pour obtenir des simulations plus performantes, de réduire la variance de g grâce à plusieurs techniques qui seront détaillées dans la suite du cours.

Générateur pseudo-aléatoires robustes

Importance cruciale et propriétés désirées dans le choix de la source de hasard

Hasard **réel** – générateur aléatoire : possible uniquement par l'observation de phénomènes physiques.

Hasard quasi-réel **sûrs** – générateur pseudo-aléatoire cryptographiques : une méthode courante pour générer de l'aléa en cryptographie consiste à « accumuler de l'entropie » (via diverses sources disponibles sur un ordinateur : temps entre deux accès au disque, taille de la mémoire, mouvements du pointeur de la souris...) et à faire passer le résultat dans une fonction de hachage cryptographique comme MD5 ou SHA-1. Ce principe est utilisé par Yarrow et Fortuna qui ne génèrent un nombre que lorsque l'entropie est suffisante.

Hasard quasi-réel **rapides** – générateur pseudo-aléatoire cryptographiques : algorithmes déterministes appelés générateurs pseudo-aléatoires, recherche fondamentale.

- Ces générateurs sont périodiques. Une propriété importante pour un générateur pseudo-aléatoire est d'avoir cette période très supérieure au nombre de simulations nécessaire à l'étude ($T \gg N$)

- Ces générateurs sont déterminés par un état initial nommé la graine : vérifier la solidité d'un modèle avec plusieurs graines est nécessaire.
- Les propriétés statistiques (uniformité, équi-distribution, indépendance et imprédictibilité) sont extrêmement difficiles à mesurer en pratique. Les générateurs sont donc homologués par des jeux de tests mis au point par des spécialistes en générateur pseudo-aléatoires (lire Marsaglia, L'Ecuyer et Simard)
- Le véritable défi de la méthode de Monte-Carlo étant la performance, ces générateurs doivent être très rapides à produire la séquence pseudo-aléatoire.

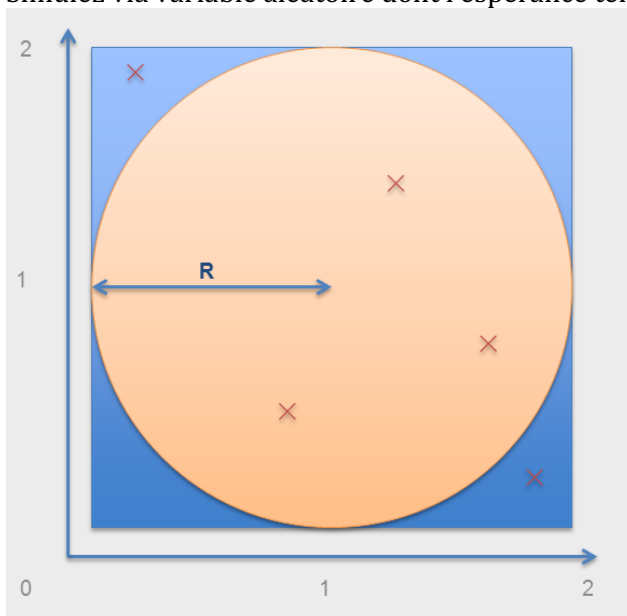
DILBERT By SCOTT ADAMS



Dans le cadre de notre cours, nous utiliserons ce type d'algorithmes, et plus particulièrement l'algorithme de Winchmann-Hill disponible en annexe.

Application numérique : calcul de Pi par méthode de Monte-Carlo.

Simulez via variable aléatoire dont l'espérance tend vers la constante Pi.



Soit Y une v.a. à valeur dans $\{0 ; 1\}$

On définit $Y = 1$ si la simulation de (U_1, U_2) deux lois uniformes, tombe dans le cercle, et $Y=0$ sinon. Par construction on a :

$$E[Y] = p(\text{simulation dans le cercle})$$

On sait que $\mathcal{A}_{\text{cercle}} = \pi$ et que :

$$\mathcal{A}_{\text{cercle}} = \mathcal{A}_{\text{carré}} * p(\text{simulation de } (U1, U2) \text{ soit dans le cercle}) = 4 * E[Y] = E[4Y]$$

On définit donc $X=4Y$: $X = 4$ si la simulation de $(U1, U2)$ deux lois uniformes, tombe dans le cercle, et $X=0$ sinon. On a

$$E[X] = \pi$$

En utilisant la définition de l'espérance $E[X] = \sum k \cdot p(X = k)$, on trouve $p(X = 4) = \frac{\pi}{4}$.
On en déduit la variance de X :

$$Var(X) = \sum (k - \pi)^2 \cdot p(X = k) = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot (0 - \pi)^2 + \frac{\pi}{4} \cdot (4 - \pi)^2$$

En TD, nous avons :

- construit un estimateur de Monte-Carlo pour $\pi = E[X]$
- construit un estimateur de Monte-Carlo pour $Var[X]$
- estimé un intervalle de confiance à 97.5% de l'estimateur de π .

II/ Simulation de variables aléatoires et pricing d'une option européenne par simulation

Contrôle surprise

Définir l'estimateur de Monte-Carlo de la fonction $g(X)$ et indiquer une méthode pour estimer la qualité de cet estimateur. Indiquer deux possibilités d'amélioration de la convergence.

Découverte de deux produits dérivés : les Futures et les Options Européennes

- Dans le cas du Future, le payoff est $[S(T) - K]$ où K correspond au prix de vente du Future. Comme le prix d'achat d'un Future est nul, $K = E[S(T)]$
- Dans le cas d'une option, la prime d'achat n'est pas nulle. Ainsi le payoff est $[S(T) - K]^+$ où K est laissé à la discrétion de l'acheteur. En revanche la prime à l'achat de l'option correspond à $E[(S(T)-K)^+] * DF(T \rightarrow t_0)$

Processus stochastiques, filtrations et martingales

Définition : un processus stochastique (également appelé processus aléatoire) est une famille de variables aléatoires (c'est-à-dire, des applications mesurables) définies sur le même espace de probabilité indexée par T et à valeurs dans S (usuellement \mathbb{R} ou \mathbb{R}^d).
Un processus stochastique est noté par $(X_t)_{t \in T}$.

Définition : une filtration est une suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ i.e. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. La filtration \mathcal{F}_n représente la quantité d'information engendrée à l'état n .

Définition : $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n) \forall n \in \mathbb{N}$ est la filtration naturelle de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$

Définition : soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une filtration et $(M_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires. Alors $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale si :

- $(M_n)_{n \geq 0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ (\mathcal{F}_n mesurable $\forall n \in \mathbb{N}$)
- M_n est intégrable $\forall n \in \mathbb{N}$ ($E[|M_n|] < +\infty$)
- $E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$

Exercice 1 : prouver que la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ définie par $M_0 = 0$ et $M_{n+1} = M_n + X$ avec $p(X = 1) = p(X = -1) = \frac{1}{2}$ est une \mathcal{F}_n -martingale et un processus markovien.

Exercice 2 : prouver que la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ définie par $M_0 = 0$ et $M_{n+1} = M_n + X_n$ avec $p\left(X_n = \frac{1}{n-50}\right) = p\left(X_n = -\frac{1}{n-50}\right) = \frac{1}{2}$ n'est pas une \mathcal{F}_n -martingale.

Définition - martingale continue : $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un processus stochastique est une martingale continue si pour tout $t, s > 0$, $\mathbb{E}[M_{t+s} | \mathcal{F}_t] = M_t$. En d'autres termes, un processus stochastique est une martingale si l'espérance des valeurs futures est la dernière valeur connue du processus.

Mouvement brownien géométrique et équation différentielles stochastiques : un premier modèle d'évolution du cours de bourse.

A l'origine, le mouvement brownien géométrique ou processus de Wiener, fut à l'origine inventé par le botaniste Robert Brown pour décrire les interactions des particules d'un liquide soumis uniquement aux chocs avec les autres particules environnantes.

Son déplacement quadratique moyen est proportionnel au temps : $\langle X_t \rangle = c \cdot t$ avec $c = \text{Var}(X_1)$ ($c = 1$ pour les mouvements browniens géométriques).

Définition élémentaire du mouvement brownien : soit (W_t) est un mouvement brownien. (W_t) est une martingale continue dans le temps, dont le carré soustrait de son temps est également une martingale. En d'autres termes, (W_t) mouvement brownien $\Leftrightarrow (W_t)$ et $(W_t^2 - t)$ martingales.

Définition 2 : (B_t) un mouvement brownien géométrique standard ssi :

- (B_t) est presque sûrement continue en tout point.
- Quelque soient les temps t et s , $t > s$, $B_t - B_s$ est indépendant du processus B_u , $u < s$. On dit que les accroissements sont indépendants les uns des autres.
- Quelque soient les temps t et s avec $t > s$, $B_t - B_s$ est de loi B_{t-s} d'espérance nulle et de variance $t-s$. On dit que les accroissements sont stationnaires.
- Si $B_0 = 0$, on dit que le mouvement brownien est standard.

Définition 3 : (W_t) est un mouvement brownien géométrique standard ssi (W_t) est continue, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ et $W_0 = 0$.

Loi normale - définition : une loi normale est une loi de probabilité absolument continue qui dépend de deux paramètres : son espérance, un nombre réel noté μ , et son écart type, un nombre réel positif noté σ . La densité de probabilité de la loi normale est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La courbe de cette densité est appelée courbe de Gauss ou courbe en cloche, entre autres. C'est la représentation la plus connue de cette loi. La loi normale de

moyenne nulle et d'écart type unitaire est appelée loi normale centrée réduite ou loi normale standard.

Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi normale, elle est dite gaussienne ou normale et il est habituel d'utiliser la notation avec la variance σ^2 : $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Théorème de changement de variable : si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

Démonstration :

Soit X de densité $f_X(x)$ et ϕ une application de changement de variable, strictement croissante, dérivable en tout point et inversible. Soit $Z = \phi(X)$.

Soit z réel.

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(\phi(X) < z) = P(X < \phi^{-1}(z)) = F_X(\phi^{-1}(z))$$

En dérivant, nous obtenons :

$$f_Z(z) = (\phi^{-1}(z))' f_X(\phi^{-1}(z))$$

Pour $\phi: z = m + \sigma \cdot x$, alors $\phi^{-1}: x = \frac{z-m}{\sigma}$

$$\text{Si } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Alors $f_Z(z) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)^2}$ ce qui est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Techniques d'échantillonnage de la loi normale par méthode de la transformée inverse

La méthode de la transformée inverse permet de produire une suite de nombre aléatoire pour n'importe quelle loi, à partir de sa fonction de répartition (également appelée cumulative). Cette méthode s'appuie sur la propriété élémentaire des fonctions de répartition : $U = F_X(X)$ (U de loi uniforme entre $[0,1]$, et X une variable aléatoire dont la loi est décrite par la fonction de répartition F_X).

À part : ce théorème se prouve aisément par un changement de variable en prenant $\phi: Z = F_X(X)$: $F_Z(z) = P(Z < z) = P(F_X(X) < z) = P(X < F_X^{-1}(z)) = F_X(F_X^{-1}(z)) = z$. On en déduit que Z est de loi uniforme sur $[0;1]$ et donc que $F_X(X)$ l'est également.

Ainsi (comme une fonction de répartition F est croissante sur un intervalle borné, elle est bijective et admet une unique fonction réciproque notée F^{-1}), on a

$$\boxed{X = F_X^{-1}(U)}$$

L'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $x \rightarrow F_{\mathcal{N}(0,1)}^{-1}(x)$ peut s'évaluer de façon algorithmique. Il faut que cet algorithme soit solide (i.e. qui quantifie correctement les événements extrêmes) et extrêmement rapide en temps processeur. Dans la littérature, nous trouvons deux algorithmes très souvent implémentés :

- L'algorithme de Beasley-Springer-Moro (BSM)

- L'algorithme de Wichura (ASA241, décliné en deux versions ppnd7 / ppnd16 pour des précisions arithmétiques simple ou double).

Un benchmark comparatif de ces divers algorithmes est disponible ici : http://www.mth.kcl.ac.uk/~shaw/web_page/papers/NormalQuantile1.pdf. Moro semble être l'algorithme le plus rapide, et Wichura le plus précis quant à la quantification des évènements extrêmes.

TD : simulation de cours de bourses par méthodes VBA

- Ecrire un algorithme pour simuler des variables aléatoires et afficher 20 trajectoires sur un graphe.
- Définir un estimateur de Monte-Carlo pour les paramètres de marché (volatilité et taux sans risque)

En TD, nous utiliserons l'algorithme ppnd16 (Wichura) dont l'implémentation VBA est donnée en Annexe.

Enoncé du Lemme d'Itô :

Soit X_t un processus stochastique satisfaisant :

$$dX_t = r(t) dt + \sigma(t) dW_t$$

Si $f(X_t, t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ alors f satisfait la formule d'Itô :

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial x^2} \sigma(t)^2 dt$$

Démonstration intuitive :

$$df(X_t, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{x=X_t} dt^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial x^k} \Big|_{x=X_t} dX_t^k$$

Les termes en $\sigma(dt)$ sont considérés comme négligeables. Nous pouvons donc réécrire la différentielle comme :

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt + \sigma(dt) + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial x^k} \Big|_{x=X_t} dX_t^k$$

De plus, $\langle W_t^2 \rangle = \text{Var}(W_1) \cdot t = t$ pour les mouvements browniens géométriques standards. Ainsi $dW_t^2 = dt$. En effet, les excursions des mouvements browniens étant en moyenne de l'ordre de \sqrt{t} , il en va de même pour leurs variations infinitésimales, et nous pouvons évaluer $dX_t^2 = (r(t)dt + \sigma(t)dW_t)^2 = r^2 dt^2 + 2r\sigma dt dW_t + \sigma^2 dW_t^2 = \sigma^2 dt + \sigma(dt)$. Ainsi $dX_t^k = \sigma(dt) \forall k \geq 3$.

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=X_t} dX_t^2 + \sigma(dt)$$

Et finalement, avec $dX_t^2 = \sigma(t)^2 dt$, nous arrivons au résultat bien connu d'Itô :

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial x^2} \sigma(t)^2 dt$$

Application à la simulation de cours de bourse :

Un cours de bourse est souvent représenté par la variable aléatoire S_t régit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t) dt + \sigma(t) dW_t$$

t le temps exprimé en années

S_t le prix de l'action au temps t

r le taux sans-risque des placements financiers

σ la volatilité de l'action au temps t

W_t un mouvement brownien

$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt$ est une équation différentielle classique, dont la solution est bien connue :

- $S_t = S_0 e^{\int_0^t r(t') dt'}$ pour r variable

- $S_t = S_0 e^{r \cdot t}$ pour r constant

Si l'on pose $f(S_t, t) = \ln(S_t)$, et par application du Lemme d'Itô, nous arrivons au résultat suivant :

$$df(x, t) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} (S_t \cdot \sigma(t))^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} dt$$

$$d \ln(S_t) = \frac{\partial \ln(S_t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial \ln(S_t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} (S_t \cdot \sigma(t))^2 \frac{\partial^2 \ln(S_t)}{\partial S_t^2} dt$$

$$d \ln(S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (S_t \cdot \sigma(t))^2 dt$$

On remplace dS_t par $S_t(r(t)dt + \sigma(t)dW_t)$:

$$d \ln(S_t) = \frac{1}{S_t} S_t (r(t)dt + \sigma(t)dW_t) - \frac{1}{2} \sigma(t)^2 dt$$

$$d \ln(S_t) = r(t)dt + \sigma(t)dW_t - \frac{1}{2} \sigma(t)^2 dt$$

Pour r et σ constants :

$$d \ln(S_t) = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t$$

En intégrant entre 0 et T :

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - 0) + \sigma(W_T - W_0)$$

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T$$

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T}$$

Présentation des options européennes

Une option call-européenne est un produit dérivé qui procure au détenteur le droit et non l'obligation d'acheter un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (appelé strike) à une date fixée. En pratique, l'acheteur exercera son droit si la valeur du sous-jacent à date d'échéance est supérieure au prix auquel il a le droit d'acheter cet actif. Son gain sera alors $(S_T - K)^+$ dans le cas particulier du call européen. Le prix de ce contrat à la date t est donné par :

$$Call(t, S_T) = \mathbb{E}[e^{-r \cdot (T-t)} \cdot (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

Dans le cas général, le prix d'option européenne dont le payoff à maturité est $\varphi(S_T)$ est :

$$V(t, S_T) = \mathbb{E}[e^{-r \cdot (T-t)} \cdot \varphi(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Révision par anticipation de l'équation de Black-Scholes

En mathématiques financières, l'équation de Black-Scholes est l'EDS gouvernant l'évolution du prix d'un produit dérivé dans les conditions du modèle de Black-Scholes que vous aborderez dans d'autres cours. La formule fermée du call européen est donnée par la formule suivante :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_T}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{F_T}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$c = e^{-R^*T} * (S_0 e^{R^*T} \cdot \mathcal{N}(d_1) - K \cdot \mathcal{N}(d_2))$$

Activité : vérifier la convergence du calcul d'Option Européennes par simulation en donnant un intervalle de confiance à 95% du prix estimé.

III/ Mise en place des méthodes de réduction de variance

Une première méthode de réduction de variance : les variables antithétiques

Description générale de la méthode

Mise au point par Hammersley et Morton, cette technique consiste à utiliser les symétries de la variable aléatoire dont on veut réduire la variance. Il faut trouver une transformation de $T: R^S \rightarrow R^S$ telle que :

- i. $T(X)$ et X deux variables aléatoires de même loi.
- ii. $g(X)$ et $g'(X) = g(T(X))$ sont négativement corrélés.

Alors pour n assez grand, la variance de $\widetilde{h}_N = \frac{\widetilde{g}_N + g'_N}{2}$ est inférieure à la moitié de la variance de \widetilde{g}_N , bien que leurs espérances soient similaires.

$$\text{Var} \left[h(X) = \frac{g(X) + g'(X)}{2} \right] = \frac{1}{4} (\text{Var}[g(X)] + \text{Var}[g(T(X))] + 2 \text{Cov}[g(X), g(T(X))])$$

En utilisant $\text{Cor}[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \cdot \text{Var}[Y]}}$ on obtient :

$$\text{Var}[h(X)] = \frac{\text{Var}[g(X)]}{2} (1 + \text{Cor}[g(X), g(T(X))])$$

Si $\text{Cor}[g(X), g(T(X))] < 0$, alors $\text{Var}[h(X)] < \text{Var}[g(X)]$.

Pour le pricing d'une option européenne, $g(X) = \left[S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}X} - K \right]^+$ est une fonction croissante de X . Pour une transformation $T(x) = -x$, alors on a bien $\text{Cor}[g(X), g(T(X))] < 0$ et l'on arrive à réduire la variance du pricing Monte-Carlo par le calcul de ces chemins antithétiques à chaque simulation.

Méthode des variables anti dans le cas gaussien

Si W un MGBS, alors $W \sim -W$.

$X = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T}$ est donc de même loi que $T(X) = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T - \sigma W_T}$.

De surcroît, lorsque h est une fonction monotone sur \mathbb{R} , si $h(X)$ est croissant, alors $h(T(X))$ est décroissant. Dans ce cas, la corrélation est toujours négative (par définition).

Cf Excel de cours sur les variables antithétiques.

Activité : vérifier la convergence du calcul d'Option Européennes par simulation dans le cadre classique, puis en implémentant la méthode de réduction de variance des variables antithétiques.

- ➔ Améliorer le code de l'algorithme fait dans le cadre du TD3 en laissant le choix à l'utilisateur final de votre logiciel le choix de la méthode (indication : ajouter une cellule qui permet de sélectionner la méthode à utiliser).

D'autres axes d'amélioration existent, tout particulièrement les suites de Sobol qui sont un set pre-chargé de nombres aléatoires.

IV/ Application aux options américaines

Pricing d'options Bermudian

Une option bermudienne peut être exercée avant maturité, à un certain nombre de dates t_k agréées par les deux contreparties en amont du contrat. Ces options sont évaluées par récurrence rétrograde : si le porteur garde l'option jusqu'à maturité, alors son payoff sera $\varphi(S_{t_N})$. Le choix d'exercice optimal avant maturité dépend de $\max(\varphi(S_{t_k}), \mathbb{E}[e^{-r \cdot \delta t} \cdot V_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_k}])$. Si le payoff immédiat est inférieur à l'espérance des flux futurs, alors il est préférable de ne pas expirer l'option. Inversement, si le payoff immédiat est supérieur à l'espérance de gains futurs, alors il faut exercer l'option. On peut ainsi définir la suite rétrograde V_{t_k} par :

$$\begin{cases} V_{t_N} = \varphi(S_{t_N}) \\ V_{t_k} = \max(\varphi(S_{t_k}), \mathbb{E}[e^{-r \cdot (t_{k+1} - t_k)} \cdot V_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_k}]) \end{cases}$$

De la même manière, la suite des prix actualisés peut se définir par :

$$\begin{cases} \widetilde{V}_{t_N} = e^{-r \cdot t_N} \varphi(S_{t_N}) \\ \widetilde{V}_{t_k} = \max(\varphi(S_{t_k}) e^{-r \cdot t_k}; \mathbb{E}[\widetilde{V}_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_k}]) \end{cases}$$

En d'autres termes, $(\widetilde{V}_{t_k}) = \text{esssup}_{\tau \in t_k \dots t_N} \mathbb{E}[e^{-r \cdot \tau} \varphi(S_\tau) | \mathcal{F}_{t_k}]$

On définit le temps d'arrêt optimal $\tau_k^* = \min(t \in \{t_k, t_N\} | \widetilde{V}_t = \varphi(S_t) e^{-r \cdot t})$

Ainsi nous pouvons exprimer le prix actualisé à l'instant t_k en fonction du temps d'arrêt optimal τ_k^* : $\widetilde{V}_{t_k} = \mathbb{E}[e^{-r \cdot \tau_k^*} \cdot \varphi(S_{\tau_k^*}) | \mathcal{F}_{t_k}]$

Définition : Essentiel Sup :

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de v.a. réelles. On définit $X = \text{esssup}_{i \in I} X_i$ tel que :

- X est une v.a. réelle
- $(X \geq X_i \text{ p. s.}) \forall i$
- si $(Y \geq X_i \text{ p. s.})$ alors $(Y \geq X \text{ p. s.})$

L'essentiel sup est le plus petit des majorants d'une suite de variables aléatoires.

Pricing d'options américaines

Le pricing des options américaines est similaire au pricing d'option bermudiennes, dans la mesure où l'on discrétise le temps.

La méthode décrite ci-dessous est issue d'une publication de Francis Longstaff et Eduardo Schwarz en 2001 (*Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach, The Review of Financial Studies*, Spring 2001 Vol. IS. No. 1, pp. 113-147).

Cette méthode est une itération sur les temps d'arrêt par récurrence rétrograde, couplée à une estimation par méthode des moindres carrés des espérances conditionnelles.

- a) Simulation de M trajectoires du cours du sous-jacent (modèle de Black-Scholes) notées w_i .

b) Récurrence rétrograde par itération sur les temps d'arrêts $\tau_N^*(w_i) \dots \tau_1^*(w_i)$

En dimension continue, le prix de l'option américaine de payoff à maturité $\varphi(S_T)$ s'écrit donc :

$$\begin{cases} \overline{P}(T) = \varphi(S_T)e^{-r.T} \\ \overline{P}(t) = \text{esssup}_{\tau \in [t, T]} \mathbb{E}[e^{-r.\tau} \varphi(S_\tau) | \mathcal{F}_t] \end{cases}$$

Par récurrence rétrograde, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{cases} \overline{P}(T) = \varphi(S_T)e^{-r.T} \\ \overline{P}(t) = \max(\varphi(S_t)e^{-r.t}, \mathbb{E}[\overline{P}(t + \delta t) | \mathcal{F}_t]) \end{cases}$$

Considérons une subdivision $t_k = \frac{k}{N} * (T - t_0) + t_0, k \in [1..N]$ de l'intervalle $[t_0, T]$.

Le payoff de l'option est approximée en assimilant une option américaine par une option bermudienne, et en faisant tendre N vers l'infini. Ainsi $\delta t = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{N}$.

$$\begin{cases} \overline{P}(t_N) = \varphi(S_{t_N})e^{-r.t_N} \\ \overline{P}(t_k) = \max(\varphi(S_{t_k})e^{-r.t_k}, \mathbb{E}[\overline{P}(t_{k+1}) | \mathcal{F}_{t_k}]) \end{cases}$$

Soit $\tau_k^* = \inf(t \in \{t_k, t_N\} | \overline{P}(t) = \varphi(S_t)e^{-r.t})$ le temps d'arrêt correspondant à l'exercice optimal.

En utilisant la définition de τ_k^* , l'expression du prix de l'option devient :

$$\begin{cases} \overline{P}(t_N) = \varphi(S_{t_N})e^{-r.t_N} \\ \overline{P}(t_k) = \mathbb{E}[e^{-r.\tau_k^*} \varphi(S_{\tau_k^*}) | \mathcal{F}_{t_k}] \end{cases}$$

On peut également écrire le temps d'arrêt par l'inégalité suivante :

$$\tau_k^* = \inf(t \in \{t_k, t_N\} | \varphi(S_t)e^{-r.t} \geq \mathbb{E}[\overline{P}(t_{k+1}) | \mathcal{F}_{t_k}])$$

Et donc le payoff de l'option américaine peut lui aussi se réécrire :

$$\begin{cases} \overline{P}(t_N) = \varphi(S_{t_N})e^{-r.t_N} \\ \overline{P}(t_k) = \max(\varphi(S_{t_k})e^{-r.t_k}, \mathbb{E}[e^{-r.\tau_{k+1}^*} \varphi(S_{\tau_{k+1}^*}) | \mathcal{F}_{t_k}]) \end{cases}$$

Amorçons la récurrence rétrograde :

$$\begin{cases} \tau_N^* = T \\ \tau_k^* = t_k \cdot \mathbb{I}_{A_k} + \mathbb{E}[e^{-r.\tau_{k+1}^*} \varphi(S_{\tau_{k+1}^*}) | \mathcal{F}_{t_k}] \cdot \mathbb{I}_{\overline{A_k}} \end{cases}$$

Si il est plus favorable d'exercer l'option au temps t_k que de ne pas exercer, autrement dit si les gains immédiats à t_k sont supérieurs à l'espérance des gains futurs, alors le nouveau temps d'arrêt devient t_k . Sinon le temps d'arrêt optimal reste τ_{k+1}^* .

Nous pouvons ainsi réécrire l'événement A_i en remplaçant la dépendance à P en une dépendance à τ_{k+1}^* :

$$A_k = \{\varphi(S_{t_k})e^{-r.t_k} = \max(\varphi(S_{t_k})e^{-r.t_k}, \mathbb{E}[\overline{P}(t_{k+1}) | \mathcal{F}_{t_k}])\}$$

$$A_k = \{\varphi(S_{t_k})e^{-r \cdot t_k} \geq \mathbb{E}[P(\tau_{k+1}^*) | \mathcal{F}_{t_k}]\}$$

$$A_k = \{\varphi(S_t)e^{-r \cdot t_k} \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-r \cdot \tau_{k+1}^*} \cdot \varphi(\tau_{k+1}^*) | \mathcal{F}_{t_{k+1}}] | \mathcal{F}_{t_k}]\}$$

En utilisant les propriétés des espérances itérées, nous arrivons au résultat :

$$A_k = \{\varphi(S_t) \geq \mathbb{E}[e^{-r \cdot (\tau_{k+1}^* - t_k)} \cdot \varphi(\tau_{k+1}^*) | \mathcal{F}_{t_k}]\}$$

Et finalement :

$$A_k = \{\varphi(S_t) \geq \mathbb{E}[e^{-r \cdot (\tau_{k+1}^* - t_k)} \cdot \varphi(S_{\tau_{k+1}^*}) | \mathcal{F}_{t_k}]\}$$

Ce résultat nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \tau_N^* = T \\ \tau_k^* = t_k \cdot \mathbb{1}_{A_k} + \mathbb{E}[e^{-r \cdot (\tau_{k+1}^* - t_k)} \cdot P(S_{\tau_{k+1}^*}) | \mathcal{F}_{t_k}] + \tau_{k+1}^* \cdot \mathbb{1}_{\overline{A_k}} \end{cases}$$

- c) Estimation de l'espérance conditionnelle par méthode des moindres carrés (*least square method*)

Un élément reste manquant dans l'estimation des A_k , le calcul de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[e^{-r \cdot (\tau_{k+1}^* - t_k)} \cdot P(S_{\tau_{k+1}^*}) | \mathcal{F}_{t_k}] = \mathbb{E}[e^{-r \cdot (\tau_{k+1}^* - t_k)} \cdot \varphi(S_{\tau_{k+1}^*}) | S_{t_k}]$$

Que l'on cherche à approximer par une fonction bien choisie $\psi_{t_k}(x)$.

On cherche à estimer la quantité $\mathbb{E}[y|x]$. On connaît l'ensemble des valeurs de Y_i prises en fonction de X_i , on note $Y_i = f(X_i)$. On cherche à minimiser par méthode des moindres carrés sur l'ensemble des chemins simulés w_i ne donnant pas de payoff nulle en t_k . On définit donc une norme par :

$$|f(S_{t_k}) - \psi_{t_k}(S_{t_k})|^2 = \sum_{i=1}^M \left(f(S_{t_k}^i) - \psi_{t_k}(S_{t_k}^i) \right)^2$$

$i=1 \mid \varphi(S_{t_k}^i) \neq 0$

Longstaff et Schwarz ont montré qu'en pratique, on peut utiliser une fonction polynomiale d'ordre 2 pour cette approche par méthode des moindres carrés. On cherche donc à minimiser :

$$|f(S_{t_k}, y) - (\alpha_k \cdot S_{t_k}^2 + \beta_k \cdot S_{t_k} + \gamma_k)|^2$$

$$\begin{aligned} \text{psi}(k)(Stk) = \\ \alpha_k \cdot s(tk)^2 + \\ \beta_k \cdot S(tk) + \gamma_k \end{aligned}$$

$\phi(\tau(k)^*) (i)$

Le calcul de l'espérance conditionnelle est remplacé par sa détermination ψ_{t_k} et nous obtenons le résultat final :

$$\begin{cases} \tau_N^* = T \\ \tau_k^* = t_k \cdot \mathbb{1}_{A_k = \{\varphi(S_t) \geq \alpha_k \cdot S_{t_k}^2 + \beta_k \cdot S_{t_k} + \gamma_k\}} + \tau_{k+1}^* \cdot \mathbb{1}_{\overline{A_k}} \end{cases}$$

d) Calcul de la prime d'option par Monte-Carlo

Pour chaque simulation w_i sera associé un temps d'exercice optimal $\tau_1^*(w_i)$ (en 0, on achète l'option, il est donc inutile de l'exercer) ainsi qu'un payoff optimal $\varphi(S_{\tau_1^*(w_i)}^i)$. Il est ainsi possible de calculer le prix Monte-Carlo de l'option américaine pour M simulations :

$$P_{t_0}^M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{-r \cdot (\tau_1^*(w_i) - t_0)} \cdot \varphi(S_{\tau_1^*(w_i)}^i)$$

TD3 : évaluation d'un put bermudien simple par méthode de Longstaff & Schwartz

- Déterminez le prix Monte-Carlo d'un put européen de strike 1,10 EUR et de maturité 3 ans, grâce aux huit simulations d'actif suivantes :

#simulation	t=0	t=1 an	t=2 ans	t=3 ans
1	1	1.09	1.08	1.34
2	1	1.16	1.26	1.54
3	1	1.22	1.07	1.03
4	1	0.93	0.97	0.92
5	1	1.11	1.56	1.52
6	1	0.76	0.77	0.9
7	1	0.92	0.84	1.01
8	1	0.88	1.22	1.34

- Trouver le prix Monte-Carlo d'un put bermuda, de strike 1.10 EUR et de maturité 3 ans, exerçable au début de chaque année, basées sur le même set de simulation.
- Implémentez un pricer sur R, le résultat attendu est 0.11 EUR.

Résultats élémentaires sur les options américaines :

1) Le prix d'une option américaine est toujours supérieur ou égal au prix d'une option européenne proposant le même payoff.

Démonstration :

Le prix d'une option américaine est déterminé par :

$$\begin{cases} \widetilde{A}_{t_N} = e^{-r \cdot t_N} \varphi(S_{t_N}) \\ \widetilde{A}_{t_k} = \max(e^{-r \cdot t_k} \cdot \varphi(S_{t_k}), \mathbb{E}[\widetilde{A}_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_k}]) \end{cases}$$

Le prix d'une option européenne par
$$\begin{cases} \widetilde{E}_{t_N} = e^{-r \cdot t_N} \varphi(S_{t_N}) \\ \widetilde{E}_{t_k} = \mathbb{E}[\widetilde{E}_{t_N} | \mathcal{F}_{t_k}] = \mathbb{E}[\widetilde{E}_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_k}] \end{cases}$$

Résultat immédiat en considérant $\widetilde{E}_{t_k} \leq \widetilde{A}_{t_k} \forall k \in \{1..N\}$

2) Dans le cas particulier du call $\varphi(S_{t_N}) = \max((S_{t_N} - K), 0)$ il est toujours favorable de ne pas exercer l'option avant maturité dans le cadre de l'option américaine et les prix d'option américaines et européennes sont égaux.

Démonstration à faire par le lecteur curieux.

TD5 : pricer d'option américaines

- Améliorer le pricer de manière à contrôler le nombre de simulation ainsi que les observations des prix d'actifs.
- Vérification du pricer via le pricing de call (prime d'option égale au call européen)
- Mettre en place une méthode de réduction de variance

V/ Le modèle de Merton : une première approche du risque de crédit

Présentation du modèle et de la notion de défaut

Non abordé en classe.

Simulation par Monte-Carlo d'obligations en présence de risque de crédit

Non abordé en classe.

VI/ Annexes

Révision par anticipation de l'équation de Black-Scholes

En mathématiques financières, l'équation de Black-Scholes est l'EDS gouvernant l'évolution du prix d'un produit dérivé dans les conditions du modèle de Black-Scholes que vous aborderez dans d'autre cours. Ci-dessous une démonstration de l'équation de Black-Scholes :

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma dW$$

$$dV(S, t) = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2$$

$$dV(S, t) = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} (S r dt + S \sigma dW) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 dt$$

$$dV(S, t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + S^2 \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW$$

Considérons le portefeuille sans risque suivant :

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= V(S, t) - \frac{\partial V}{\partial S} S \\ \Delta \Pi(t) &= \Delta V(S, t) - \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S \\ \Delta \Pi(t) &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + S^2 \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t = r \Pi \cdot \Delta t = r \left(V(S, t) - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) \cdot \Delta t \\ \boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + Sr \frac{\partial V}{\partial S} + S^2 \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r \cdot V(S, t)} \end{aligned}$$

Révision par anticipation : calcul de la valeur de marché d'une option call-européen, appelée formule (et non pas équation !) de Black-Scholes

Ci-dessous une démonstration assez classique de la formule de Black-Scholes dans le cadre de l'évaluation de prime d'option européenne, sur un stock qui ne paie aucun dividende, en considérant taux et volatilité déterministes et constants.

!/ Attention, ne pas confondre formule de Black-Scholes qui donne la valeur de marché des options européennes, avec l'équation de Black-Scholes. La formule de Black-Scholes est une solution particulière de l'équation de Black-Scholes, pour les conditions aux limites suivantes :

- $Call(0, t) = 0$
- $Call(S, T) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} S$
- $Call(S, T) = \max \{S - K, 0\}$

Nous cherchons à évaluer la quantité suivante :

$$c = \mathbb{E}[e^{-R*T} * (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_0]$$

Considérant des taux déterministes, nous obtenons :

$$c = e^{-R*T} * (\mathbb{E}[S_T \cdot 1_{S_T > K} | \mathcal{F}_0] - \mathbb{E}[K \cdot 1_{S_T > K} | \mathcal{F}_0])$$

Nous scindons l'intégrale en deux :

$$c = e^{-R*T} * \left(\mathbb{E} \left[S_0 e^{\left\{ R - \frac{1}{2} \sigma^2 \right\} * T + \sigma \sqrt{T} \cdot N(0,1)} \cdot 1_{S_T > K} \middle| \mathcal{F}_0 \right] - K \cdot \mathbb{E} [1_{S_T > K} | \mathcal{F}_0] \right)$$

On transforme la seconde espérance en probabilité :

$$c = e^{-R*T} * \left(\mathbb{E} \left[S_0 e^{\left\{ R - \frac{1}{2} \sigma^2 \right\} * T + \sigma \sqrt{T} \cdot N(0,1)} \cdot 1_{S_T > K} \middle| \mathcal{F}_0 \right] - K \cdot \mathbb{P}[S_T > K | \mathcal{F}_0] \right)$$

Les termes constants peuvent être sortis du calcul de l'espérance :

$$c = e^{-R*T} * \left(S_0 e^{R*T} \cdot \mathbb{E} \left[e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 * T + \sigma \sqrt{T} \cdot N(0,1)} \cdot 1_{S_T > K} \middle| \mathcal{F}_0 \right] - K \cdot \mathbb{P}[S_T > K | \mathcal{F}_0] \right)$$

Utilisons le théorème de Girsanov pour effectuer le changement de probabilité

$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{\sigma \cdot B_T - \frac{1}{2} \sigma^2 * \langle B_T \rangle}$ et définir à partir de B_T \mathbb{P} -martingale, la \mathbb{Q} -martingale

$$\widetilde{B}_T = B_T - \sigma \cdot t$$

$$c = e^{-R*T} * (S_0 e^{R*T} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1_{S_T > K} | \mathcal{F}_0] - K \cdot \mathbb{P}[S_T > K | \mathcal{F}_0])$$

On peut alors transformer la première espérance en probabilité :

$$c = e^{-R*T} * (S_0 e^{R*T} \cdot \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T > K | \mathcal{F}_0] - K \cdot \mathbb{P}[S_T > K | \mathcal{F}_0])$$

Enfin nous procédons à l'évaluation de ces probabilités :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T > K | \mathcal{F}_0] &= \mathbb{P}^{\mathbb{Q}} \left[S_0 e^{\left\{R - \frac{1}{2}\sigma^2\right\} * T + \sigma\sqrt{T} \cdot N(0,1)} > K \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T > K | \mathcal{F}_0] &= \mathbb{P}^{\mathbb{Q}} \left[S_0 e^{\left\{R + \frac{1}{2}\sigma^2\right\} * T + \sigma\sqrt{T} \cdot N'(0,1)} > K \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T > K | \mathcal{F}_0] &= \mathbb{P}^{\mathbb{Q}} \left[F_T e^{\frac{1}{2}\sigma^2 * T + \sigma\sqrt{T} \cdot N'(0,1)} > K \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T > K | \mathcal{F}_0] &= \mathbb{P}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{2}\sigma^2 * T + \sigma\sqrt{T} \cdot N'(0,1) > \ln\left(\frac{K}{F_T}\right) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T > K | \mathcal{F}_0] &= \mathbb{P}^{\mathbb{Q}} \left[N'(0,1) > \frac{\ln\left(\frac{K}{F_T}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T > K | \mathcal{F}_0] &= \mathbb{P}^{\mathbb{Q}} \left[N'(0,1) < \frac{\ln\left(\frac{F_T}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T > K | \mathcal{F}_0] &= \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{F_T}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \mathcal{N}(d_1) \end{aligned}$$

Pareillement

$$\mathbb{P}[S_T > K | \mathcal{F}_0] = \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{F_T}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \mathcal{N}(d_2)$$

En conclusion (apprendre le résultat et non la démonstration):

$$c = e^{-R*T} * (S_0 e^{R*T} \cdot \mathcal{N}(d_1) - K \cdot \mathcal{N}(d_2))$$

L'algorithme de Winchman-Hill (équivalent alea() de Excel)

```
Option Explicit

Public TheXYZ(2) As Double

Sub InitWichmannHill()

'seed of the generator, initialize this value as desired.

TheXYZ(0) = 5
TheXYZ(1) = 10
TheXYZ(2) = 15
End Sub

Function ExecuteWichmannHill()

    TheXYZ(0) = (171 * TheXYZ(0)) Mod 30269
    TheXYZ(1) = (172 * TheXYZ(1)) Mod 30307
    TheXYZ(2) = (170 * TheXYZ(2)) Mod 30323

    ExecuteWichmannHill = (TheXYZ(0) / 30269 + TheXYZ(1) / 30307 + TheXYZ(2) / 30323)
    - Int(TheXYZ(0) / 30269 + TheXYZ(1) / 30307 + TheXYZ(2) / 30323)

End Function
```

L'algorithme PPN16 (équivalent loi.normale.inverse() de Excel)

```
Option Explicit

Private zero As Double
Private one As Double
Private half As Double
Private split1 As Double
Private split2 As Double
Private const1 As Double
Private const2 As Double
Private a(7) As Double
Private b(7) As Double
Private c(7) As Double
Private d(7) As Double
Private e(7) As Double
Private f(7) As Double
Private p As Double

Public Function ppnd16(p)

    zero = 0
    one = 1
    half = 0.5
    split1 = 0.425
    split2 = 5
    const1 = 0.180625
    const2 = 1.6
    a(0) = 3.38713287279637
    a(1) = 133.141667891784
    a(2) = 1971.59095030655
    a(3) = 13731.6937655095
    a(4) = 45921.9539315499
    a(5) = 67265.7709270087
    a(6) = 33430.5755835881
    a(7) = 2509.08092873012
    b(0) = 0
    b(1) = 42.3133307016009
    b(2) = 687.187007492058
    b(3) = 5394.19602142475
    b(4) = 21213.7943015866
    b(5) = 39307.8958000927
    b(6) = 28729.0857357219
    b(7) = 5226.49527885285
```

```
c(0) = 1.42343711074968
c(1) = 4.63033784615655
c(2) = 5.76949722146069
c(3) = 3.6478483247632
c(4) = 1.27045825245237
c(5) = 0.241780725177451
c(6) = 2.27238449892692E-02
c(7) = 7.74545014278341E-04
d(0) = 0
d(1) = 2.05319162663776
d(2) = 1.6763848301838
d(3) = 0.6897673349851
d(4) = 0.14810397642748
d(5) = 1.51986665636165E-02
d(6) = 5.47593808499535E-04
d(7) = 1.05075007164442E-09
e(0) = 6.6579046435011
e(1) = 5.46378491116411
e(2) = 1.78482653991729
e(3) = 0.296560571828505
e(4) = 2.65321895265761E-02
e(5) = 1.24266094738808E-03
e(6) = 2.71155556874349E-05
e(7) = 2.01033439929229E-07
f(0) = 0
f(1) = 0.599832206555888
f(2) = 0.136929880922736
f(3) = 1.48753612908506E-02
f(4) = 7.86869131145613E-04
f(5) = 1.84631831751005E-05
f(6) = 1.42151175831645E-07
f(7) = 2.04426310338994E-15

Dim q As Double, r As Double, ret As Double
q = p - half
If (Abs(q) <= split1) Then
    r = const1 - q * q
    ppnd16 = q * ((((((a(7) * r + a(6)) * r + a(5)) * r + a(4)) * r + a(3)) * r +
a(2)) * r + a(1)) * r + a(0)) / ((((((b(7) * r + b(6)) * r + b(5)) * r + b(4)) * r +
b(3)) * r + b(2)) * r + b(1)) * r + one)
    Exit Function
End If

If (q < zero) Then
    r = p
Else
    r = one - p
End If
If (r <= zero) Then
    ppnd16 = zero
    Exit Function
Else
    r = Sqr(-Log(r))
    If (r <= split2) Then
        r = r - const2
        ret = ((((((c(7) * r + c(6)) * r + c(5)) * r + c(4)) * r + c(3)) * r +
c(2)) * r + c(1)) * r + c(0)) / ((((((d(7) * r + d(6)) * r + d(5)) * r + d(4)) * r +
d(3)) * r + d(2)) * r + d(1)) * r + one)
    Else
        r = r - split2
        ret = ((((((e(7) * r + e(6)) * r + e(5)) * r + e(4)) * r + e(3)) * r +
e(2)) * r + e(1)) * r + e(0)) / ((((((f(7) * r + f(6)) * r + f(5)) * r + f(4)) * r +
f(3)) * r + f(2)) * r + f(1)) * r + one)
    End If

    If (q < zero) Then
        ret = -ret
    End If
    ppnd16 = ret
End If
End Function
```