Réglementation et mesures de risque de marché

Contents

Avant-propos : le chapitre introductif présente succinctement les marchés financiers pour que le lecteur-étudiant puisse appréhender quelques débouchés possibles en finance de marché. Ainsi le premier chapitre n'est pas centré sur le risque de marché, qui est la finalité de ce cours, mais permet néanmoins de cerner les acteurs et les produits à la genèse des différents risques financiers. Le second chapitre est *centré sur la gestion du risque de marché, et le troisième chapitre sur sa gouvernance au niveau international dans l'optique d'éviter les potentielles prochaines crises.*

A. Introduction à la finance

I. La finance comme acteur majeur de développement économique

Pourquoi la finance ?

Sécuriser

Les biens, la propriété, les échanges…

Placer, financer

Mettre en relation les excédents de liquidités avec les besoins de liquidité (financement). Plus le prêt est sécurisé (présence de collatéral) et moins la prime de risque est importante. Les banques sont des acteurs incontournables de l'intermédiation et la transformation financière.

Couvrir

Couverture de risque : fixer le prix de commodités en avance

Quelques repères historiques

- Moins 6000, premières traces de l'écriture permettent le recensement des possessions en Mésopotamie, en langue sumérienne.
- Moins 2000, la Mésopotamie compte déjà ses premiers banquiers, qui prêtent (avec intérêts) des dépôts reçus en grain ou en or. C'est la première opération de financement de l'histoire, consignée sur des tablettes écrites en cunéiforme. La monnaie est alors basée sur les métaux précieux. Ces initiatives sont encore commerciales et locales.
- Moins 600, Thalès fait un montage d'ingénierie financière en louant des moulins à bas prix, puis en sous-louant l'année suivante lors de l'explosion de la récolte d'olives. Aujourd'hui, Thalès aurait acheté des Futures pour spéculer.
- La finance de marché apparaît au 12ème siècle avec les foires (des marchés) mettant en contact les commerçant du Nord et du Sud de l'Europe.
- Au 14ème siècle, les banques se développent pour financer les premières guerres européennes, qui conduiront à la formation de l'Europe actuelle.
- 1634-1637 : premier marché à terme mis en place en Hollande, de gré-à-gré, pour la vente des bulbes de Tulipes. S'en suit surement la première bulle financière, qui finira par éclater.
- En 1694, la Banque d'Angleterre est créée pour gérer la dette astronomique du pays. *Avant de tripler au début du 19ème avec les guerres Napoléoniennes.*
- 18ème siècle : premiers billets papiers en Europe (1720 en France, faillite de la Compagnie des Indes suite à une confiance trop faible dans le billet). Echec. 1800, Napoléon instaure le Franc Germinal ainsi que le billet de banque, constamment convertible.
- Les premiers produits dérivées se traitent dès 1751 à la Bourse d'Amsterdam (principalement grâce aux essors de la Compagnie des Indes Orientales, une des premières structures à user des Actions et des Obligations pour financer ses projets). Ainsi on peut traiter sur le marché au comptant (Spot), à termes (Futures) et même un marché d'options.

- Création de la Bourse de Paris en 1724, 1792 pour Wall-Street (NYSE) à NYC.
- Accords de Bretton-Woods en 1944, la monnaie n'est plus indexée sur l'or, mais sur le dollar, lui-même indexé sur l'or (mais n'ayant plus besoin d'avoir des réserves d'or dans les coffres).
- Accords de la Jamaïque en 1976, abandon de l'étalon-or, l'étalon dollar seul prévaut.

Un historique des crises économiques sera détaillé dans le troisième volet de ce cours.

II. Les grands acteurs du système financier

Retail banking

*Les particuliers interagissent avec les **banques de détail** pour*

- *Sécuriser leurs fonds et ne plus le cacher sous le matelas*
- *Epargner pour des projets futurs*
- *Obtenir des financements*

Non abordé dans ce cours axé sur la finance de marché.

Corporate

Les **Entreprises** qui ont des besoins de couvrir leurs risques financiers pour ne s'occuper que d'un seul type de risque

- Une mine d'or qui ne veut pas que ses résultats soient indexés sur le prix de l'or, mais uniquement sa capacité à l'extraire de manière efficace
- Un avionneur qui ne veut pas que ses résultats soient trop corrélés aux taux de change ou bien au prix du Kérosène

Ainsi les entreprises, moyennant une soulte (variable en fonction de la volatilité du marché), ne conserve plus que la gestion des risques propres à leur business (produire de l'OR, vendre des produits manufacturés…)

Investments and Corporate Banking (ICB)

Les **Banques de Financements et d'Investissements (BFI)** dont le rôle est multiple (il y a de nombreux métiers différents dans une banque) :

- Activité d'intermédiation financière (sécurisation des transferts de flux financiers entre des institutions ou des particuliers)
- Activité de financements des entreprises et des particuliers
- Activité de couverture des risques financiers

Financial Markets

Un marché financier est un lieu d'échange privilégié de devise, de titres (Actions ou Bonds), de produits dérivés (Futures) ou encore de matières premières, entre des acheteurs et des vendeurs. Leurs visions de l'offre et de la demande y sont confrontées. Pour se faire, il faut :

- au préalable transmettre de l'information (prix auxquels les acheteurs sont prêts à acheter, prix auxquels les vendeurs sont prêts à vendre). De tout temps, c'est la loi de l'offre et de la demande

qui fait les prix. Plus d'acheteurs que de vendeurs = montée des prix, et inversement. Il y a un deal lorsque un acheter match le « bid » ou un vendeur match le « ask ».
- puis transmettre et exécuter les ordres lorsqu'un consensus est trouvé.

Les marchés financiers peuvent être des lieux physiques (NYSE) ou bien des places électroniques (NASDAQ).

Les marchés financiers proposant des produits « Listed » sont :

- Capital Markets : les marchés des actions et marchés des obligations permettent le financement des entreprises et l'échanges des titres. On distingue le marché primaire (première émission d'un titre), du marché secondaire, qui permet d'évaluer la liquidité des titres. *Euronext pour les valeurs européennes, NYSE & Nasdaq pour les valeurs américaines. Attention, ne pas confondre le marché NASDAQ et l'indice NASDAQ Composite Index qui évalue une performance d'un groupe d'actions côtés sur le marché éponyme.*
- Commodity Market *: CME pour les produits agricoles, LBMA pour les métaux précieux, ICE pour le pétrole*
- Futures markets, selon le type du sous-jacent

D'autres marchés peuvent-être OTC :

- Foreign exchange (FX) markets, pour les échanges de devises, sont animés par les grosses banques.
- Money markets, pour le financement court terme. Le prix dépend du client.
- Interbank lending market : la BCE met en place une plateforme électronique pour les échanges interbancaires overnight. *Le taux moyen de ces opérations est appelé le taux EONIA – EUR Overnight Interest Average ; Fed Fund aux USA ; SONIA en GB…* Sur le plus long terme des échanges OTC sont également réalisés, et permettent de définir les courbes EURIBOR / LIBOR…
- Derivatives markets : pour la couverture du risque financier ou encore la spéculation avec effet de levier
- Forward markets, selon le type du sous-jacent
- Cryptocurrency market pour l'échange de crypto-devises *Coinbase par exemple.*

Certains produits sont financés sur plusieurs marchés. Un arbitrage est un écart notable de prix entre deux marchés, duquel peut résulter un gain sans investissement initial. Les algorithmes de trading sont spécialisés dans l'exécution des ordres d'arbitrages et apportent de la liquidité aux marchés.

Central Counterparty Clearing House (CCP)

Les chambres de compensations sont des organes qui permettent, en théorie, de supprimer le risque de contrepartie du marché sur lesquelles elle opère, en agissant comme contrepartie unique d'un ensemble de transactions financières, et en soumettant quotidiennement des appels de marges auprès de ses clients. Si un client ne répond pas à l'appel de marge quotidien, ses contrats sont clôturés.

Hedge-Funds

Les **fonds d'investissements** utilisent de l'effet de levier pour maximiser la rentabilité (en minimisant les risques de préférence), tout en apportant de la liquidité au marché (en exerçant les opportunités d'arbitrages par ex).

- *Bridgewater Associates (AUM = 160 MUSD), AQR Capital Management (77 M), Man Group (53 M), Renaissance Technologies (50 M), Two Sigma Investment (50 M)*
- *En France* [1]*, Stratus Master Limited (5.6 MUSD)*

Asset-Management (Gestion d'actifs)

La **gestion d'actifs** consiste à gérer les capitaux externes selon des contraintes contractuelles. L'Asset-Managers propose un certain nombre de « supports » suivant des règles de gestions très précises, dans lesquels les investisseurs peuvent investir. Une partie des plus-values et des frais de gestions sont facturés aux investisseurs.

- *BlackRock (5 M d'USD en gestion), Vanguard Asset management (4M), State Street Global Advisors (2.3M)*
- *En France, Amundi (1.4 M) est le 9ème mondial*

Rating-Agencies

Les **agences de notations** : évaluer le risque de non-remboursement (risque de crédit) de la dette ou d'un emprunt des Etats et des Entreprises, mais également le risque de crédit des produits proposés par les banques à leurs clients.

- *3 agences se partagent plus de 90% du marché : Moody's, Standard & Poor's et Fitch Ratings.*

Central Banks

Les **Banques Centrales** régulent le taux de dépôt et de le taux de financement, ainsi que la mise en conformité du système financier, de manière à limiter le risque de défaillance et de viser une inflation aux alentours de 3%.

- *FED aux USA, ECB en UE, BoE au UK*

Bank of International Settlements

La **Bank of International Settlements** est la banque centrale des banques centrales, en charge de la coopération entre les banques centrales et de l'évolution de la réglementation internationale pour assurer une stabilité financières (aka éviter les crises).

L'ISDA (International Swaps and Derivatives Association) est une organisation professionnelle regroupant des intervenants majeurs sur les marchés financiers dérivés, dont le but premier est de fournir des contrats standards de référence pour les transactions, principalement les Swaps et les CDS. Ce contrat type est appelé ISDA Master Agreement. Cette association d'opérateurs de marchés est également la seule à pouvoir concrètement décider qu'un pays est à considérer comme étant en défaut de paiement, comme ce fut le cas lors de la crise de la dette souveraine pour la Grèce le 9 mars 2012.

En Décembre 2013, l'ISDA a également proposé une harmonisation des contrats OTC (par opposition aux contrats dit « Listed », c'est-à-dire non-collatéralisés par une chambre de compensation) nommée SIMM (Standard Initial Margin Model for Non-Cleared Derivatives [2], qui sera détaillée au chapitre C.

Financial regulation

La régulation financière est gérée par des organes affiliés aux banques centrales, et coordonnée au niveau international par la banque de règlements internationaux au niveau international. Le chapitre C sera consacré à la réglementation financière.

III. Les grandes Directions de la bancassurance.

L'organisation d'une banque dépend à un moment donné de l'état du marché dans lequel elle interagit et des choix stratégiques faits.

LES DIRECTIONS METIERS (aka centre de profits)

Banques Grande Clientèle

- Activités de financement
    - Financement par IPO (Initial Public Offer), OCEANE (obligation convertible en actions nouvelles ou existantes), OBSAR (Obligation à bons de souscription en actions remboursables), OC (obligations convertibles)…
    - Financement de matières premières (mines d'or) et de l'énergie (forage pétroliers)
    - Financements aéronautiques, d'exportations (pipelines) ou d'infrastructures (télécom)
    - Financements immobiliers et conseils en fusion-acquisition et capital-investissement
    - Financements stratégiques et d'acquisitions (Takeover, LBO, …)
    - Strategic Equity Transactions (produits dérivés actions pour résoudre des problématiques stratégiques (e.g. prise de participation) et financements sur actions liquides)
- Activité de trading vanille (produits à faible marge mais à fort volume)
    - Investissement et couverture de taux
    - Couverture de change
    - Opérations de refinancement (crédits syndiqués, primaire obligataire, titrisation et monétisation d'actifs)
    - Placement d'actifs sur le marché monétaire
    - Couverture sur le marché des matières premières
- Activité de trading spécialisé (produits à forte marge)
    - Trading et exécution
    - Ingénierie Financière
    - Recherche action pour l'aide à l'investissement
- Direction de la Stratégie -> en lien avec le métier le plus fort
- Génération du PNB par la facturation des « fees » et des « spreads »

Assurance

- Assurance vie et non vie.

Gestion d'actifs, la gestion de fortune

- Asset-Management et banque privée.

Services Financiers Spécialisés

- Créations de produits distribués dans les banques de détail (crédits conso, cautions, affacturage, titres, paiements, …)

Banque de proximité

- Le canal de distribution historique de la bancassurance.

LES DIRECTIONS SUPPORTS (aka centre de coût)

Risques, Conformité et Contrôles Permanant

- Risques de crédit, de marché et de contrepartie
- Risque de conformité
- Audit interne

Digital

- Mise en place de solutions digitales automatisées pour continuer d'augmenter le débit des opérations de flux.

Autres directions: Finance, Ressources Humaines, Secrétariat Général et Inspections Générale, Opérations

IV. Les produits financiers comme matière première de l'industrie financière

Les 6 principales classes d'actifs

Equity, Taux, Forex, Credit, Fixed Income, Commodities, Hybrides

Premiers produits financiers

Le marché spot

Il est possible d'acheter au marché spot, un certain nombre d'actifs, au prix Spot :

a. Les actions
b. Les obligations d'Etat (govies) et obligations corporates
c. Un taux (prêt qui commence immédiatement)
d. Une devise (transaction FX)
e. Des commodités ? pas vraiment car il y a le délai de livraison. On peut uniquement acheter la première date de livraison possible, on l'appelle le Front-Month Future.

Le marché des Futures

Les Futures / les forward : acheter un produit dans le futur à un prix fixé tout de suite, que l'on appelle prix du Future ou prix forward. Les Futures se traitent sur des places de marché, tandis que les forward s'échangent de gré-à-gré (produit OTC).

En utilisant le principe de non-arbitrage qui stipule qu'il n'est pas possible de faire un gain avec un investissement nul, on peut trouver la formule du prix Future en T par un raisonnement d'arbitrage :

- En t=0, emprunter S_0 EUR à t=0, acheter l'actif A au prix de S_0, et on vend un Future au prix F_T (on ne gagne pas / perds pas d'argent à ce moment).
- En t (entre t=0 et T), on reçoit les dividendes, les coupons, et on paie le coût de stockage pour les commodités. On note l'ensemble des ces flux $Flux_i$

- En t=T, on déboucle le forward, c'est-à-dire que l'on donne l'actif A à notre client en échange du prix fixé à t=0 F_T EUR), et on rembourse le capital emprunté plus les intérêts, on rembourse donc la somme de $S_0 e^{RT}$ EUR.

Par raisonnement de non-arbitrage, l'espérance de gain est donc nulle

$$F_T - S_0 e^{RT} + \sum_{flux\ intermédiaires\ à\ date\ t_i} Flux_i e^{R(T-t_i)} = 0$$

Et donc le prix forward de n'importe quel actif peut être écrit :

$$F_T = \left(S - \sum_{flux\ intermédiaires\ à\ date\ t_i} Flux_i e^{-R.t_i} \right) e^{RT}$$

Un raisonnement mathématique permet de retrouver ce même prix. Le théorème fondamental de finance quantitative nous dit qu'en absence d'opportunité d'arbitrage, le prix des actifs actualisés sont des martingales :

$$E[S_T \cdot e^{-RT} | \mathcal{F}_t] = S_t \cdot e^{-Rt}$$

Or le prix des Futures correspond à l'espérance du prix S_T vu depuis aujourd'hui, on peut écrire dans le cas où l'actif A ne délivre pas de flux intermédiaire :

$$F_T = E[S_T | \mathcal{F}_0] = S_0 \cdot e^{RT}$$

On peut appliquer le même raisonnement dans le cas où l'actif A délivre des flux fixes à des dates définies en avance (dividendes pour les actions, coupons pour les obligations…).

$$E\left[\left(S_T + \sum_{t=0}^{T} Flux_i \cdot e^{R(t_i - T)}\right) \cdot e^{-RT} | \mathcal{F}_t\right] = \left(S_t + \sum_{t=0}^{t} Flux_i \cdot e^{R(t_i - t)}\right) \cdot e^{-Rt}$$

Or le prix des Futures correspond à l'espérance du prix S_T vu depuis aujourd'hui, on peut écrire :

$$F_T = E[S_T | \mathcal{F}_0] = \left(S_0 - \sum_{t=0}^{T} Flux_i \cdot e^{R(t_i - T)}\right) \cdot e^{RT}$$

Les swaps

Les swaps : échanger des flux inconnus en échange d'un flux connu et fixé tout de suite que l'on nommé Taux de Swap. Très utilisé sur les marchés de taux. Le calcul de prix de swaps sera détaillé pendant cours de taux.

Les options européennes

Les options : se donner la possibilité d'acheter (pour les Call) ou de vendre (pour les Put) dans le futur (à la maturité T) un sous-jacent à un prix fixé à l'achat, nommé le strike et noté K. Il faut voir cela comme une assurance, utilisé sur tous les marchés. Il existe donc des options sur des taux (appelées caplet et floorlet), des options sur des actions, sur des commodités, sur des taux de change…

Le call européen donne donc la quantité d'argent suivante à maturité :

$$C_T = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K; 0)$$

Symétriquement, le put européen donne la gain suivant à maturité pour l'acheteur :

$$P_T = (K - S_T)^+ = \max(K - S_T; 0)$$

La question est de savoir quel est le prix de ce call en t=0. En utilisant le théorème fondamental de la finance de marché, nous savons que le prix discounté des actifs suit une martingale :

$$\mathbb{E}[C_T \cdot e^{-RT} | \mathcal{F}_t] = C_t \cdot e^{-Rt}$$

$$C_0 = \mathbb{E}[C_T \cdot e^{-RT} | \mathcal{F}_0]$$

$$\boxed{C_0 = \mathbb{E}[(S_T - K)^+ \cdot e^{-RT} | \mathcal{F}_0]}$$

Symétriquement le prix du Put en t=0 vaut $P_0 = [(K - S_T)^+ \cdot e^{-RT} | \mathcal{F}_0]$

On peut déduire de ces deux formules la parité Call-Put :

$$C_0 - P_0 = \mathbb{E}[\{(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+\} \cdot e^{-RT} | \mathcal{F}_0]$$

$$C_0 - P_0 = \mathbb{E}[(S_T - K) \cdot e^{-RT} | \mathcal{F}_0]$$

$$C_0 - P_0 = \mathbb{E}[S_T \cdot e^{-RT} | \mathcal{F}_0] - K \cdot e^{-RT}$$

$$C_0 - P_0 = \mathbb{E}[S_T | \mathcal{F}_0] \cdot e^{-RT} - K \cdot e^{-RT}$$

$$\boxed{C_0 - P_0 = (F_T - K) \cdot e^{-RT}}$$

Dans le cas particulier où l'actif ne délivre pas de flux intermédiaires, le prix forward discounté est égal au spot en 0 : $F_T \cdot e^{-RT} = S_0$ et donc $C_0 - P_0 = S_0 - K \cdot e^{-RT}$.

Les Credit Default Swap - CDS

Les CDS : assurance sur le défaut d'une contrepartie financière, exactement comme une assurance voiture, la prime est payée tous les mois jusqu'à l'hypothétique accident. Produit propre au marché de crédit. Sera approfondi au M2.

Le Hull, la bible des marchés financiers

Votre bible à connaitre sur le bout des doigts : le [3]

Les paramètres élémentaires : les risk-factors.

Les risques les plus élémentaires sont issus des produits les plus liquides. Ce sont à partir de ces prix que l'on peut en déduire le prix de produits plus complexes.

Asset class	**Elementary risks**
Equity	Share price, dividends, repo rates, vol, cor
Rates	Liquid instruments, vol, cor
Forex	FX price, Liquid swaps prices, volatilities, correlations
Crédit	Liquid CDS prices, vol, cor
Commodities	Asset Future prices (no spot market), vol, cor

V. Les principaux types de risques financiers

Risque de crédit des prêts

Votre prêt n'est pas remboursé. La totalité du nominal est perdue.

- ➔ Calcul de RWA Crédits

Risque de contrepartie

- ➔ Calcul de la CVA

Risque de liquidité I (manque de cash)

- ➔ Calcul des ratios de liquidité

Risques opérationnels

Rogue trading, Fat Finger, Key Person,

- ➔ Approche Intensité / Fréquence
- ➔ Plan de Continuité d'Activité

Risques de conformité et risques de réputation

Amande BNP de 9 milliards pour le trading avec la Lybie, pays sur la liste d'embargo des USA

Scandale de la manipulation du Libor (UBS)

Affaire Kerviel…

- ➔ Ce risque n'est pas quantifié, mais un département entier veille à la mise en conformité de l'institution financière.

Risques de marché

Risque lié aux variations des paramètres de marché. Une estimation intéressante du risque de marché permet d'informer sur les pertes potentielles dues à des mouvements de marché à un horizon de liquidité donné. Ainsi la structure peut suffisamment thésauriser pour éviter la faillite.

- ➔ Les VaR, sVaR et les IRC sont utilisés pour leurs quantifications.

Risque de liquidité (impossibilité de revente d'un produit)

Chaque type de produit à un horizon de liquidité basé sur le passé. Ce risque est rarement quantifié, mais pris en compte dans le calcul des risques de marché

Risque equity

Prix des spots, valeurs des dividendes, des taux de repo (pour pouvoir calculer les Equity forwards)

Risque de change

Taux de changes, prix de cross-currency swaps (pour calculer les FX forwards), et volatilités

Risque de taux

Sera précisé durant le cours de taux

Risque de crédit marché

Probabilités de defaut ou spread de crédit, non détaillé dans ce cours.

Risque de prix de matière premières

Prix du pétrole, des carcasses de porcs…

Conclusion de la première partie

Importance capitale de quantifier ces différents risques pour la survie de la structure, en dégageant la plus forte rentabilité pour un niveau de risque maximal choisi en accord avec les actionnaires. D'autre part, les institutions financières collectent l'argent des citoyens. Il serait fâcheux de tout perdre !

Quels sont les risques encourus par un Asset-Manager français qui achète des Futures sur Amazon, et vend pour 1 MEUR d'actions Amazon sur le marché des USA, après avoir emprunté 1 MEUR à une banque ?

B. Le risque de marché et ses principaux indicateurs

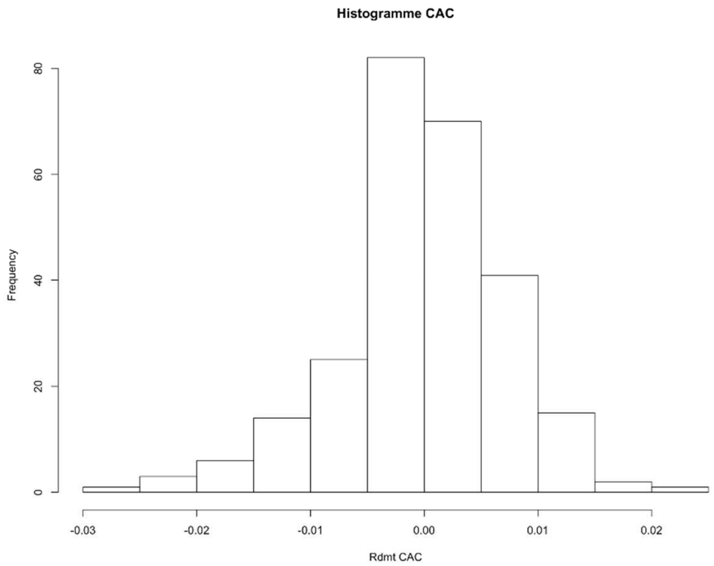
Les statistiques sont au cœur des méthodes calculatoires des risques financiers. Bien maitriser les statistiques élémentaires sont donc un prérequis à ce cours.

VI. Rappels de statistiques

Soit X une variable aléatoire et x_i une réalisation de cette variable. On définit alors :

La densité de répartition

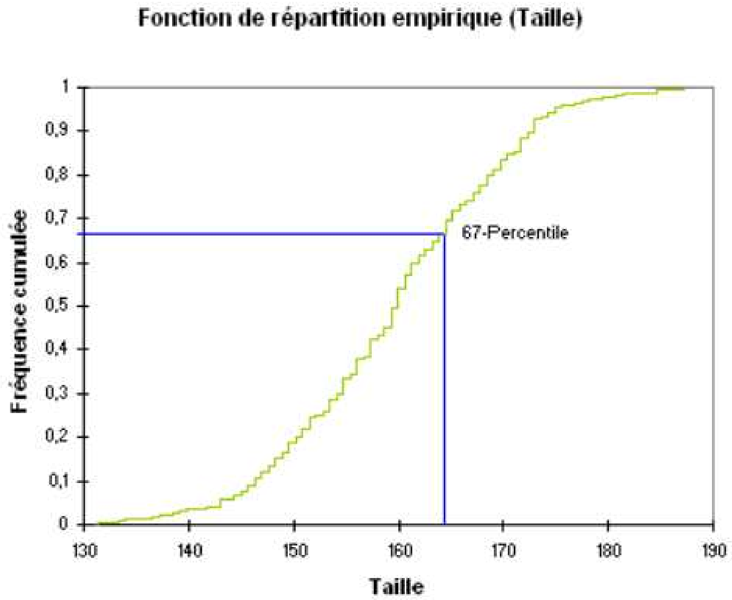
L'histogramme représente ici le nombre d'observation pour les rendements du CAC. Il y a près de 80 observations correspondantes à des variations relatives comprises dans l'intervalle $[-0.05\%; 0\%]$. On peut en déduire une densité de répartition empirique en divisant par le nombre d'observations totales, de manière à ce que l'intégrale entre $[-\infty; +\infty]$ égale 1.



On note la densité de répartition $f_X(x)$

Les fonctions cumulatives

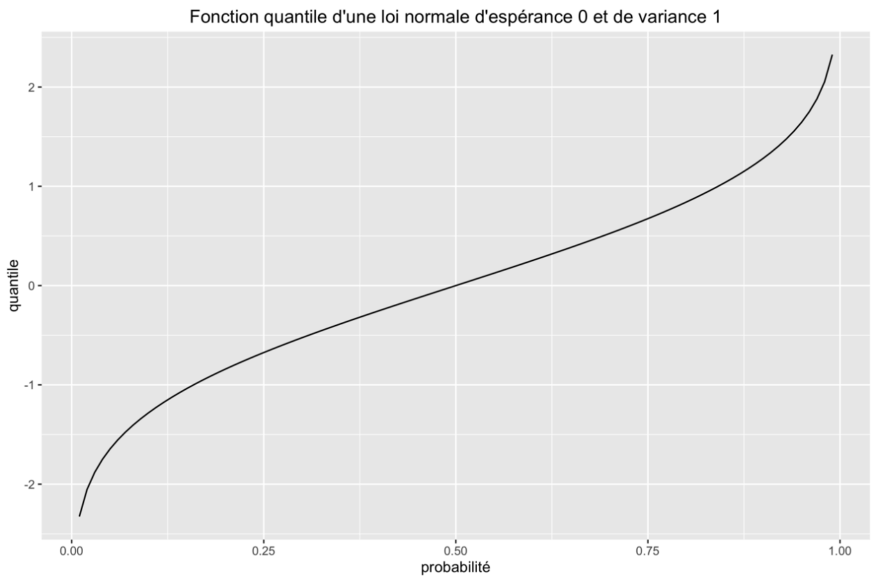
On note la fonction cumulative $F_X(t) = P(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$ la probabilité qu'à une variable aléatoire d'être située sous un seuil donné. Cette fonction à valeur dans [0 ;1], vaut 0 en moins l'infini et +1 en plus l'infini (toutes les valeurs sont plus petites que l'infini, aucune valeur n'est plus petite que l'infini).



La fonction quantile

C'est l'inverse de la fonction cumulative. En effet, on définit mathématiquement le quantile q_α par $P(X < q_\alpha) = F(q_\alpha) = \alpha$. On peut ainsi définir une fonction quantile F^{-1} telle que $q_\alpha = F^{-1}(\alpha)$. La fonction quantile est définie sur [0,1] et à valeurs dans l'espace de définition de la variable aléatoire considérée.

Le qqplot (quantile plot) représente la loi quantile empirique associée à un histogramme donné.



VII. Statistiques descriptives

Soit X une variable aléatoire et xi une réalisation de cette variable.

Espérance et estimateurs

L'espérance d'une variable aléatoire discrète se caractérise par :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \Omega} k \cdot P(X = k)$$

Si X est une v.a. continue, on remplace la somme par une intégrale :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} x \cdot f_X(x) dx$$

Si l'on considère un vecteur x_i de réalisations de la loi X, alors il est possible de définir l'estimateur non-biaisé de l'espérance :

$$\widetilde{\mu_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Quantiles spécifiques (centiles, quartiles, fractiles…)

Le quantile à x% permet de connaître la valeur de la distribution permettant d'avoir (1-x%) des données avant et x% après (interpolation linéaire si besoin). Ainsi la moitié des valeurs de la distribution est plus basses (l'autre moitié est plus haute) que le quantile à 50%, également appelé la médiane. La fonction quantile donne une lecture rapide des centiles / quantiles / fractiles (1%, 25%, médiane, 75%, 99%)

Variance et écart-types empiriques

L'écart type correspond à « la moyenne des distances à la moyenne ». Une distance étant toujours positive, la variance est donc « la moyenne des écarts à la moyennes au carré ».

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

On note aussi que pour $a, b \in \mathbb{R}^2$ et X, Y des v.a.

$$Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot cov(X, Y) = \sigma_X{}^2 + \sigma_Y{}^2 + 2 \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \rho_{X,Y}$$

$\rho_{X,Y}$ représente la corrélation est sera définie au paragraphe suivant.

Un réagencement des termes permet également d'écrire la variance comme suit :

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2 - 2 \cdot X \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Cette seconde écriture permet de trouver facilement la valeur de l'espérance du carré de n'importe quelle loi, en particulier l'espérance du carré d'une loi normale centrée.

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}(0, \sigma = t)^2] = V\big(\mathcal{N}(0, \sigma = t)\big) + \mathbb{E}[\mathcal{N}(0, \sigma = t)]^2 = t^2 + 0 = t^2$$

C'est ce résultat la qui nous permet également de montrer que $\mathbb{E}[B_t^2] = \sqrt{dt}$, résultat nécessaire à la compréhension du Lemme d'Itô.

Comme pour l'espérance, il est également possible de trouver un estimateur sans biais de la variance :

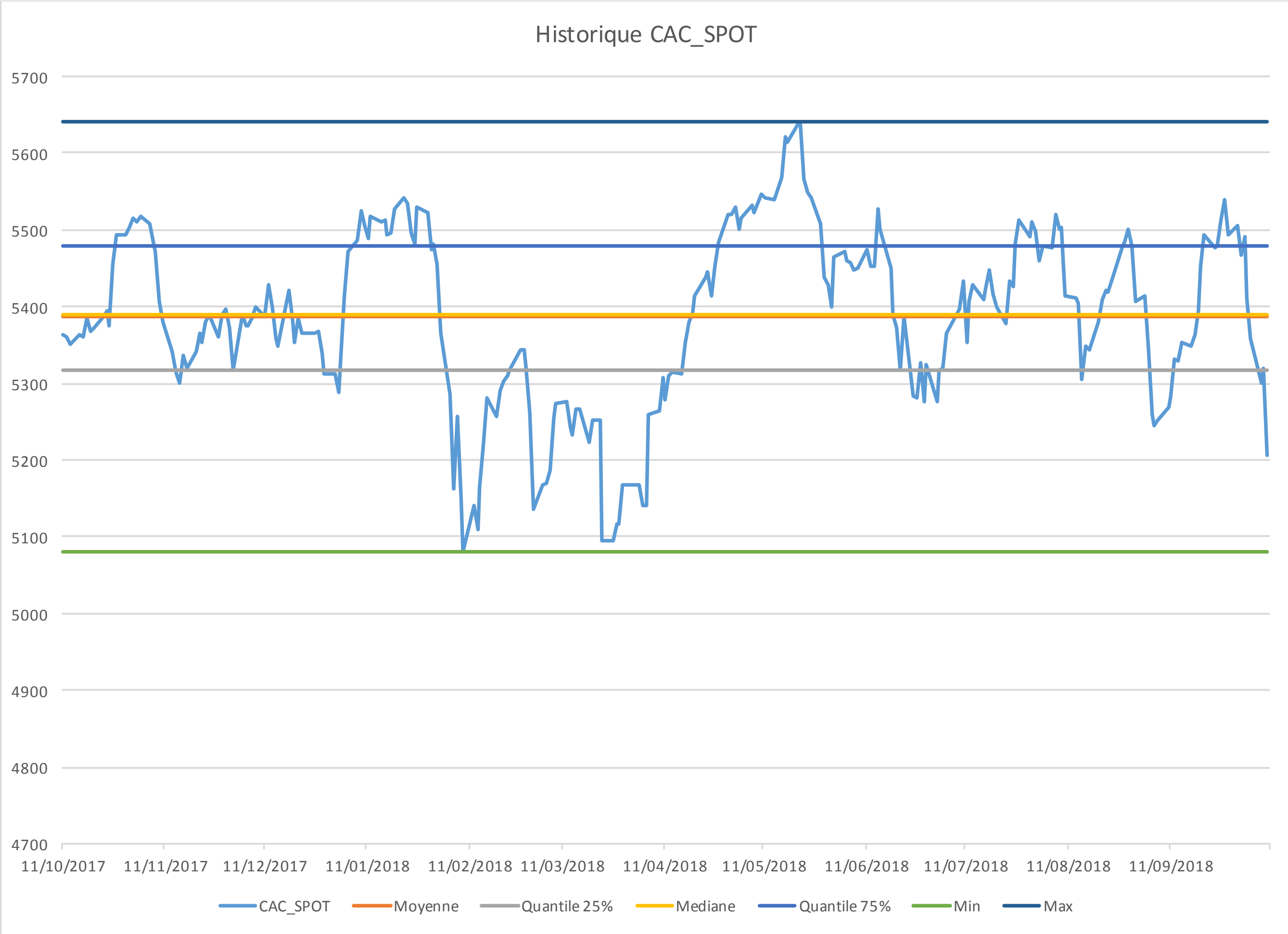
$$\widetilde{S_n} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{\mu_n})^2 = \sigma^2$$

Avec n-1 au dénominateur car l'estimateur de l'écart type est basé sur l'estimateur de la moyenne, lui-même estimé. On perd donc un degré de liberté, se reporter à la correction de Bessel pour de plus amples informations.

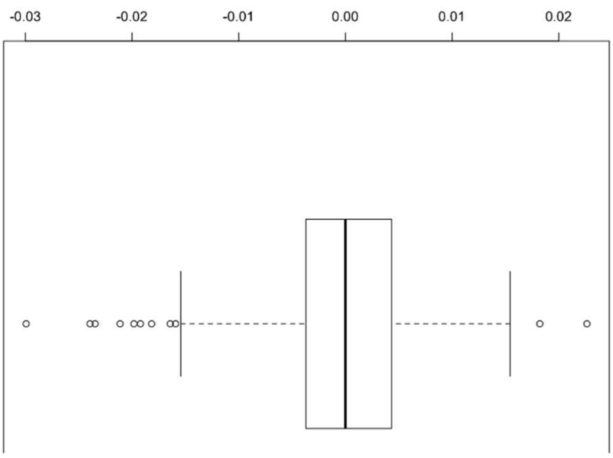
La racine de la variance correspond à l'écart-type :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Mis à part la variance, exprimée en « unité de l'axe au carré », le reste est exprimé dans la même unité de la variable observée (ci-dessous en point de CAC). Les différentes métriques empiriques se trouvent sur le graphique suivant :



Une autre représentation des principales statistiques descriptives est la boite à moustache, représentant les fréquences entre les centiles 25%, 50% (médiane) et 75%.



VIII. Statistique bi-varié

Covariance de Pearson

La covariance de deux variables aléatoires s'écrit

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

On note les propriétés suivantes :

- $cov(X, X) = Var(X)$
- $cov(X, Y) = cov(Y, X)$
- $cov(aX, Y) = a \cdot cov(X, Y)$
- $cov(X + a, Y) = cov(X, Y)$
- $cov(X + Z, Y) = cov(X, Y) + cov(Z, Y)$ (Linéarité de la covariance)

De cette définition on peut aussi noter que :

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$$

Le lecteur avisé sera démontrer aisément ces résultats.

L'estimateur non biaisé de la covariance définie se comme :

$$\widetilde{c_n} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \widetilde{\mu_X})(y_i - \widetilde{\mu_Y})$$

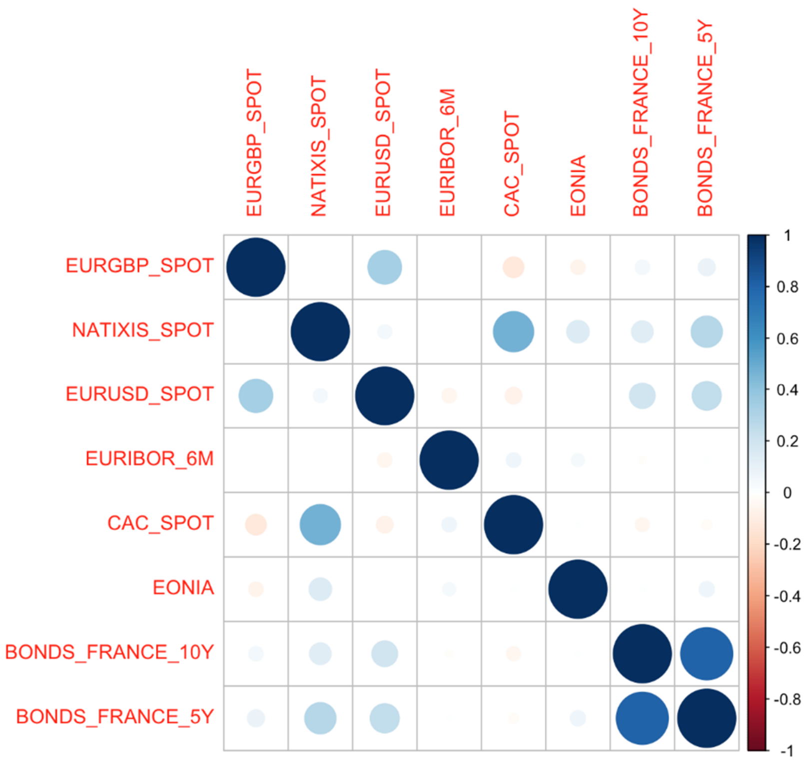
Corrélation de Pearson

La corrélation de Pearson est définie comme :

$$\rho_{X,Y} = cor(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \; si \; \sigma_X \,\&\, \sigma_Y \neq 0$$

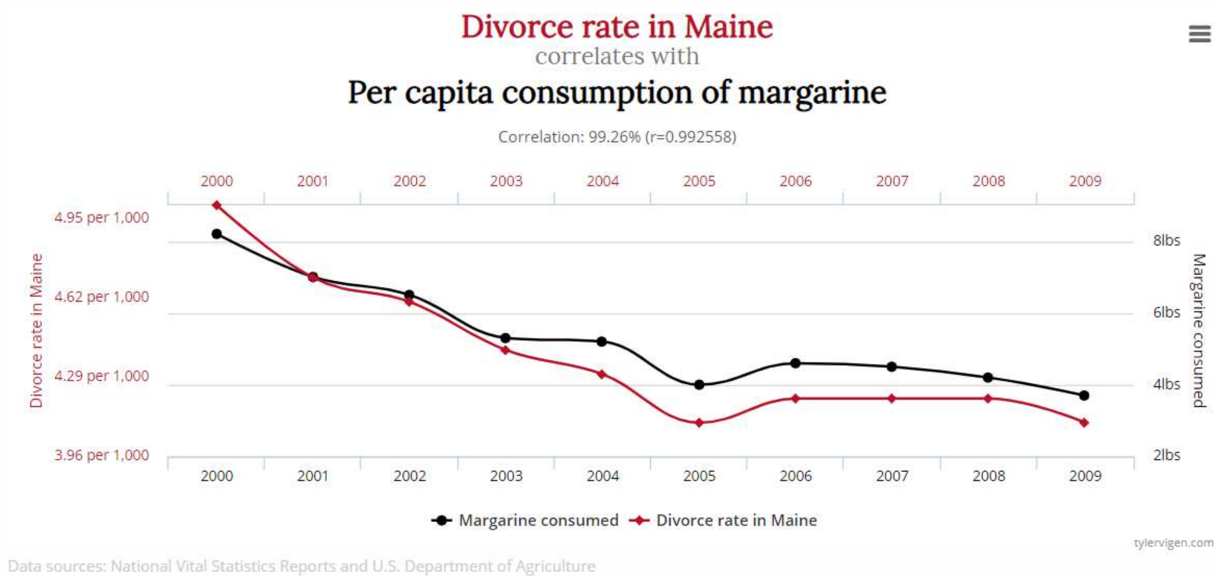
La corrélation varie entre -1 et 1 et représente un lien linéaire entre les variables X et Y. C'est une covariance normalisée. On note qu'une variable à variance nulle est constante, ainsi sa corrélation est nulle avec les autres variables : $\rho_{a,Y} = 0$, pour $a \in \mathbb{R}$.

Il est d'usage de représenter graphiquement les corrélations de nombreuses variables dans un tableau à double entrée, comme ci-après version R ou version Excel.



Matrice de corrélations	EURGBP_SPOT	NATIXIS_SPOT	EURUSD_SPOT	EURIBOR_6M	CAC_SPOT	EONIA	BONDS_FRANCE_10Y	BONDS_FRANCE_5Y
EURGBP_SPOT	1.000	-0.007	0.333	-0.007	-0.123	-0.060	0.057	0.083
NATIXIS_SPOT	-0.007	1.000	0.054	-0.005	0.476	0.148	0.136	0.287
EURUSD_SPOT	0.333	0.054	1.000	-0.060	-0.079	-0.001	0.193	0.249
EURIBOR_6M	-0.007	-0.005	-0.060	1.000	0.061	0.046	-0.014	0.007
CAC_SPOT	-0.123	0.476	-0.079	0.061	1.000	0.006	-0.054	-0.025
EONIA	-0.060	0.148	-0.001	0.046	0.006	1.000	0.007	0.068
BONDS_FRANCE_10Y	0.057	0.136	0.193	-0.014	-0.054	0.007	1.000	0.804
BONDS_FRANCE_5Y	0.083	0.287	0.249	0.007	-0.025	0.068	0.804	1.000

La corrélation indique la force d'une relation linéaire entre deux variables. Il est important de noter que la corrélation et la causalité sont deux notions complétement différentes.



A titre d'exemple, la corrélation entre la consommation de margarine et le taux de divorce dans l'Etat du Maine est proche de 100%, mais existe-t-il un lien de causalité ?

Si les variables disposent d'une relation différentes (quadratique, exponentielle, logarithmique etc.) il est nécessaire d'utiliser d'autres métriques comme le **rho de Spearman qui est une corrélation d'ordre,** ou le taux de Kendall.

Lois paramétriques et lois historiques

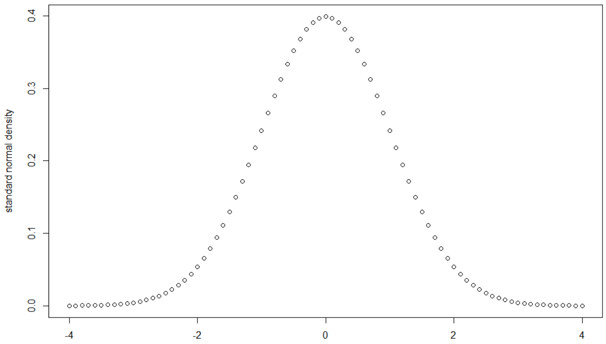
Les lois paramétriques sont des lois statistiques dont la densité est modélisée par une formule mathématique dépendant de quelques paramètres. Les lois historiques sont des distributions dont la fonction cumulative est construite par les différentes observations historiques. Comme il est plus difficile de travailler les théories (financières ou physiques) avec des lois historiques, il est commun d'approximer des lois historiques par des lois paramétriques afin d'en simplifier la modélisation et de la rendre indépendante des observations historiques qui peuvent varier d'une expérience à l'autre.

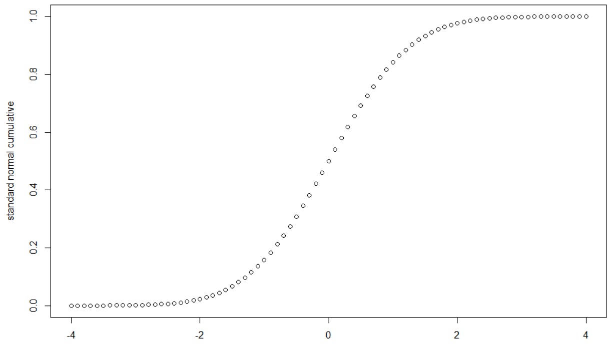
Exemple de loi paramétrique : la loi normale

La loi normale est une loi statistique paramétrique dépendant de deux paramètres, μ représentant la moyenne, et σ représentant l'écart-type de la loi. On note cette loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

- Densité de probabilité : $\varphi : x \in \mathcal{R} \to \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
- Fonction de répartition : $P(X < x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(\mathrm{t})dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

On note que $\Phi(+\infty) = 1$.





- Fonction génératrice de moment : $M(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

Pour la loi normale centrée réduite, on note que

$$M(1) = \mu$$

$$M(2) = \sigma$$

$$M(3) = 0\ (Asymétrie\ ou\ Skew)$$

$$M(4) = 3\ (Kurtosis\ ou\ aplatissement)$$

On note :

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (le centrage et la réduction effectue la standardisation)
- $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, {\sigma_X}^2)\ et\ Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, {\sigma_Y}^2)$ et $cor(X, Y) = 0$ alors $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, {\sigma_X}^2 + {\sigma_Y}^2)$

Echantillonnage d'une loi normale

Prérequis : génération de loi uniforme

Il existe plusieurs techniques pour générer une loi normale. Cependant au préalable d'une génération de loi paramétrique aléatoire, il faut avant tout être à même de simuler des variables aléatoires uniformes.

Pour rappel, la notion d'aléatoire est difficilement définissable pour une machine. Plusieurs algorithmes quasi-aléatoires existent, deux sont très utilisés dans la littérature et Excel.

- **Mersenne-Twister** : présenté en 97, il dispose d'une période de révolution de 2^{19937}-1 et est encore utilisé aujourd'hui pour la génération aléatoire (*alea* d'Excel depuis 2010, *runif* dans R).
- **Wichmann-Hill** : présenté en 82, dispose d'un cycle de 6.95×10^{12} de possibilité de tirage, car basé sur 3 graines différentes (anciennement *alea* dans Excel).

Box-Muller

Cet algorithme permet à partir d'un set de deux lois uniformes $\begin{matrix} W \sim U(0,1) \\ V \sim U(0,1) \end{matrix}$ des lois uniformes, de générer deux lois normales indépendantes :

$$N_1 = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V) \sim \mathcal{N}(0,1)$$
$$N_2 = \sqrt{-2\ln(V)}\cos(2\pi U) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Marsaglia et Bray

Cet algorithme est semblable au précédent : soit $\begin{matrix} W \sim U(-1,1) \\ V \sim U(-1,1) \end{matrix}$

Si $Z = W^2 + V^2 \geq 1$, alors $\begin{matrix} N_1 = W\sqrt{-2\frac{\ln(Z)}{Z}} \sim \mathcal{N}(0,1) \\ N_2 = V\sqrt{-2\frac{\ln(Z)}{Z}} \sim \mathcal{N}(0,1) \end{matrix}$, sinon on rejette la simulation.

Méthode de la transformée inverse

La méthode de la transformée inverse permet de produire une suite de nombre aléatoire pour n'importe quelle loi, à partir de sa fonction de répartition (également appelée cumulative). Cette méthode s'appuie sur la propriété élémentaire des fonctions de répartitions : $\mathrm{F}_X(\mathrm{X}) \sim U(0,1)$ une loi uniforme [0,1]. Ainsi X une variable aléatoire dont la loi est décrite par la fonction de répartition F_X.

Preuve : ce théorème se prouve en cherchant la fonction de répartition de $\mathrm{Z} = \mathrm{F}_X(X)$:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{F}_X(X)}(z) = P(\mathrm{F}_X(X) < z) = P(\mathrm{X} < \mathrm{F}_X^{-1}(z)) = \mathrm{F}_X(\mathrm{F}_X^{-1}(z)) = z$$

On en déduit que $\mathrm{F}_X(X)$ est de loi uniforme sur car sa fonction de répartition est l'identité.

Par ailleurs une fonction de répartition F est croissante sur un intervalle borné, elle est bijective et admet une unique fonction réciproque notée F^{-1}, on a donc :

$$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{F}_X{}^{-1}(\mathrm{U})}$$

L'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $x \rightarrow \mathrm{F}_{\mathcal{N}(0,1)}{}^{-1}(x)$ peut s'évaluer de façon algorithmique. Il faut que cet algorithme soit solide (i.e. qui quantifie correctement les évènements extrêmes) et extrêmement rapide en temps processeur. Dans la littérature, nous trouvons deux algorithmes très souvent implémentés :

- L'algorithme de Beasley-Springer-Moro (BSM)
- L'algorithme de Wichura (ASA241, décliné en deux versions ppnd7 / ppnd16 pour des précisions arithmétiques simple ou double).

Un benchmark comparatif de ces divers algorithmes est disponible ici : http://www.mth.kcl.ac.uk/~shaww/web_page/papers/NormalQuantile1.pdf. BSM semble être l'algorithme le plus rapide, et Wichura le plus précis quant à la quantification des évènements extrêmes.

Matrices de covariances et de corrélations

Pour un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ on peut définir une matrice de covariance de manière à ce que chaque case de la matrice corresponde à :

$$cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]$$

On remarque que la diagonale d'une telle matrice correspond à la variance des X_i. On note une telle matrice de covariance $\Gamma = cov(X)$.

De la même manière on peut définir une matrice de corrélation de façon à faire coïncider chaque case de la matrice avec la corrélation entre X_i et X_j.

$$cor(X_i, X_j) = \frac{\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2]}$$

Le lien entre la matrice de covariance et la matrice de corrélation est le suivant :

$$\boxed{\Sigma = \mathrm{cov(X)} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dots} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot cor(X) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dots} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}}$$

Echantillonnage de vecteurs gaussiens

Les techniques d'échantillonnage détaillées au paragraphe précédent permettent de générer des lois normales indépendantes. Les lois normales intrinsèquement corrélées sont appelées **loi normale multidimensionnelle ou vecteur Gaussien, noté :** $W \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$

Avec μ le vecteur des moyennes des lois et Σ la matrice de covariance des lois entre elles comme détaillé au paragraphe précédent.

En dimension 2 : vecteurs gaussiens bi-variés

Pour générer un vecteur gaussien de dimension 2, on cherche :

$$W \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}\right)$$

Soit N_1 et N_2 deux lois normales indépendantes, générées avec l'algorithme de Box-Muller par exemple. On cherche W_1 et W_2 telle que

$$W_1 = \mu_1 + \sigma_1 N_1$$
$$W_2 = \mu_2 + \alpha N_1 + \beta N_2$$
$$cov(W_1, W_2) = \rho\sigma_1\sigma_2$$

On cherche donc α et β tels que :

$$V(W_2) = V(\alpha N_1 + \beta N_2) = \alpha^2 + \beta^2 = \sigma_2^2$$

$$cov(W_1, W_2) = cov(\sigma_1 N_1, \alpha N_1 + \beta N_2) = \sigma_1\alpha = \rho\sigma_1\sigma_2$$

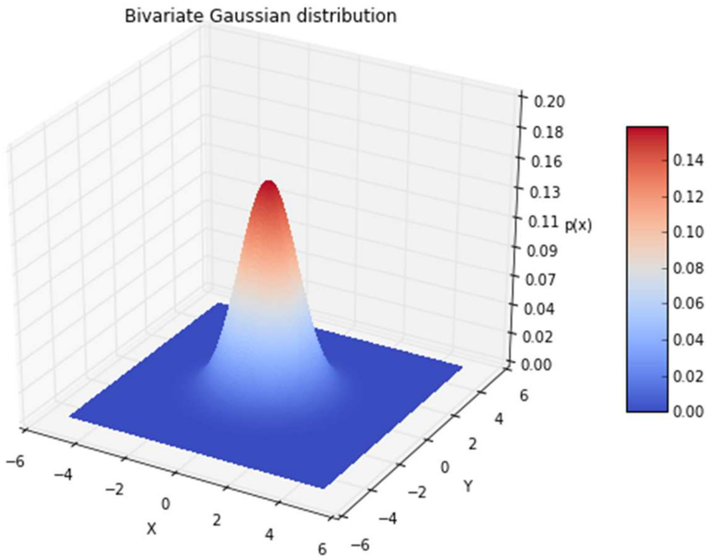
$$\alpha = \rho\sigma_2$$

$$\beta = \mp\sqrt{\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_2^2} = \mp\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}$$

Ainsi les deux possibilités de vecteur gaussien en dimension 2 sont :

$$\boxed{W = \begin{pmatrix} W_1 = \mu_1 + \sigma_1 N_1 \\ W_2 = \mu_2 + \sigma_2\left(\rho N_1 \mp \sqrt{(1-\rho^2)}N_2\right) \end{pmatrix}}$$

Pour le cas à 2 variables, on parle de loi normale bi-variée. Le graphique ci-après montre la densité de répartition de loi normale bi-variée indépendante :



Ce sont les copules $\mathcal{C}$ qui permettent de définir les densités de lois multivariées à partir des densités individuelles :

$$f_{X_1 \ldots X_N}(x1, \ldots, x_N) = \mathcal{C}\left(f_{X_1}(x1), \ldots, f_{X_N}(x_N)\right)$$

En dimension n : vecteurs gaussiens multivariés

On cherche W tel que

$$W \sim \mathcal{N}(\vec{\mu} = (\mu_1 \ldots \mu_n), \Sigma)$$

1) On considère un vecteur de loi normale centrées réduites et indépendantes N.

$$N \sim \mathcal{N}(\vec{0}, Id)$$

$$\mathrm{cov(N)} = \mathbb{E}[\mathrm{N} \cdot t(\mathrm{N})] = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet la covariance de $\mathrm{N_i}$ et $\mathrm{N_j}$ vaut 1 si i=j, et 0 sinon en raison de l'indépendance du vecteur.

2) On considère L de telle sorte que $\Sigma = \mathrm{L} \cdot \mathrm{t(L)}$ et cherche la matrice de covariance de $\mathrm{L \cdot N}$

$$\mathrm{cov(L \cdot N)} = \mathbb{E}[(\mathrm{L \cdot N} - \mathbb{E}[\mathrm{L \cdot N}]) \cdot t(\mathrm{L \cdot N} - \mathbb{E}[\mathrm{L \cdot N}])]$$

$$\operatorname{cov}(\mathrm{L} \cdot \mathrm{N}) = \mathbb{E}[\mathrm{L} \cdot \mathrm{N} \cdot t(\mathrm{L} \cdot \mathrm{N})] = \mathbb{E}\left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{N} \cdot t(\mathrm{N}) \cdot t(L)\right] = \mathrm{L} \cdot \mathbb{E}[\mathrm{N} \cdot t(\mathrm{N})] \cdot t(L)$$

Et finalement

$$\operatorname{cov}(\mathrm{L} \cdot \mathrm{N}) = L \cdot \mathrm{Id} \cdot t(L) = \Sigma$$

Ainsi on peut ainsi définir notre vecteur gaussien $W \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ par la formule suivante :

$$W = \vec{\mu} + \mathrm{L} \cdot \mathrm{N}$$

μ le vecteur de moyenne de la génération aléatoire

$\Sigma = L \cdot L^T$ une matrice carrée où Σ est la matrice de covariance

N un vecteur de loi normales aléatoires

Pour rappel, la matrice de covariance est semi-définie positive (ses valeurs propres sont positives ou nulles). Elle est définie positive (valeurs propres strictement positives) s'il n'existe aucune relation affine presque sûre entre les composantes du vecteur aléatoire. La matrice Σ est donc diagonalisable et on peut déterminer une de ses racines, e.g. L.

On peut estimer L de 2 manières :

- **La décomposition de Cholesky** (disponible en annexe) permettant de déterminer une matrice carré triangulaire inférieure.
- **La décomposition $\Sigma=ODO^T$** avec :
  - O la matrice orthogonale des vecteurs propres de Σ
  - D la matrice orthogonale des valeurs propres de Σ

  On a alors : $L=OD^{1/2}$

Le Théorème Centrale Limite

Soit (Y_1 … Y_n) une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) suivant la même loi D. Supposons que l'espérance $\mathbb{E}[X]$ et l'écart-type $\widetilde{\sigma_n}$ de D existent et soient finis avec $\widetilde{\sigma_n} \neq 0$.

On définit l'estimateur de l'espérance comme la suite aléatoire :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i \in [1..n]} X_i$$

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]}{\widetilde{\sigma_n}}$$

Alors la loi suivie par Z_n est une loi de Student S(n-1). Quand n > 10, la loi de Student s'approxime par une loi normale. Les équations suivantes sont donc une bonne approximation quand n est assez grand ; on dit que Z_n converge en loi vers la loi normale N(0,1) :

$$\lim_{n \to \infty} P\,(Z_n < z) = \phi(z) \text{ ou encore } Z_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0{,}1)$$

Ce qui nous permet aussi de définir que :

$$P(-w < Z_n < w) = 1 - \alpha$$

Avec w le quantile de fractile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi N(0,1)

$$P\left(-w < \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]}{\widetilde{\sigma_n}} < w\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X}_n - w\frac{\widetilde{\sigma_n}}{\sqrt{n}} < \mathbb{E}[X] < \bar{X}_n + w\frac{\widetilde{\sigma_n}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Alors

$$IC(\mathbb{E}[X]) = \left[\bar{x}_n - w\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_n + w\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$\alpha = 5\% \Leftrightarrow fractile$ à 0,975 $e.g. 1.66$

La table de la loi normale se trouve en Annexe.

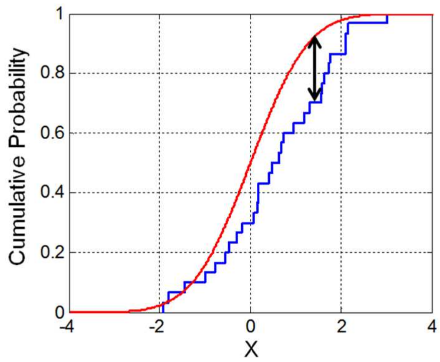
IX. Test d'adéquation de loi : Kolmogorov-Smirnov et Jarque-Bera

Deux types de tests statistiques existent, les tests paramétriques (JB) et les tests non-paramétriques (KS). Pour vérifier si la loi des rendements d'une série financière suivent bien une la loi normale, il est possible d'effectuer :

Le test de Kolmogorov-Smirnov

On va tester les hypothèses suivantes :

H_0 = X et Y suivent la même loi ; H_1 = X et Y sont issus de 2 lois différentes



Le test se base sur la comparaison des quantiles des deux lois. Plus les quantiles sont éloignés, plus les lois sont différentes. Le test ressort un D qui est la distance maximale entre les 2 lois → $D_{n,m} = \sup_x |F_{1,n}(x) - F_{2,m}(x)|$

On rejette H_0 au niveau α si :

$$D_{n,m} > c(\alpha)\sqrt{\frac{n+m}{nm}}$$

Avec

$$c(\alpha) = \sqrt{-\frac{1}{2}\ln(\alpha)}$$

Le test de Jarque-Bera

On va tester les hypothèses suivantes :

H_0 = X suit une loi normale ; H_1 = X ne suit pas une loi normale

La statistique est :

$$JB = \frac{n-k}{6}\left(S^2 - \frac{(K-3)^2}{4}\right)$$

avec $S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ et $K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$

JB suit une loi du khi 2 à 2 degrés de liberté. On regarde alors dans la table correspondante.

Ce test revient à tester les moments d'ordre 3 et 4 de la loi normale (skew et kurtosis). Cela revient à tester $\left(H_0 : S = 0 \;\&\; K = 3\right)\; ou\; (H_1 :\; S \neq 0\; et\; K \neq 3)$.

Pour rappel, pour la lecture des tests paramétriques, on s'intéresse à la probabilité d'occurrence de la statistique voulue dans la table de la loi (D pour KS et JB ici), au travers de la p-value. On peut noter les règles suivantes :

$$pvalue = P(x|H_0)$$

Donc plus la p-value est faible, plus on rejette H0 (plus on estime que ce n'est pas probable que x soit en adéquation avec l'hypothèse nulle. L'article de Wikipédia permet d'aller plus loin dans l'analyse des p-values :

- $p \leqslant 0{,}01$: très forte présomption contre l'hypothèse nulle
- $0{,}01 < p \leqslant 0{,}05$: forte présomption contre l'hypothèse nulle
- $0{,}05 < p \leqslant 0{,}1$: faible présomption contre l'hypothèse nulle
- $p > 0{,}1$: pas de présomption contre l'hypothèse nulle

Vérification sur échantillon

En appliquant le test de Kolmogorov-Smirnov aux rendements du taux de change historique EUR-USD versus la loi normale estimée sur ses paramètres, on obtient avec le logiciel R :

```
        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  data_analysis
D = 0.034561, p-value = 0.9153
alternative hypothesis: two-sided
```

On ne rejette donc pas le test. L'EUR-USD semble suivre une loi normale. Pour la métrique de Jarque-Bera, on a l'output suivant :

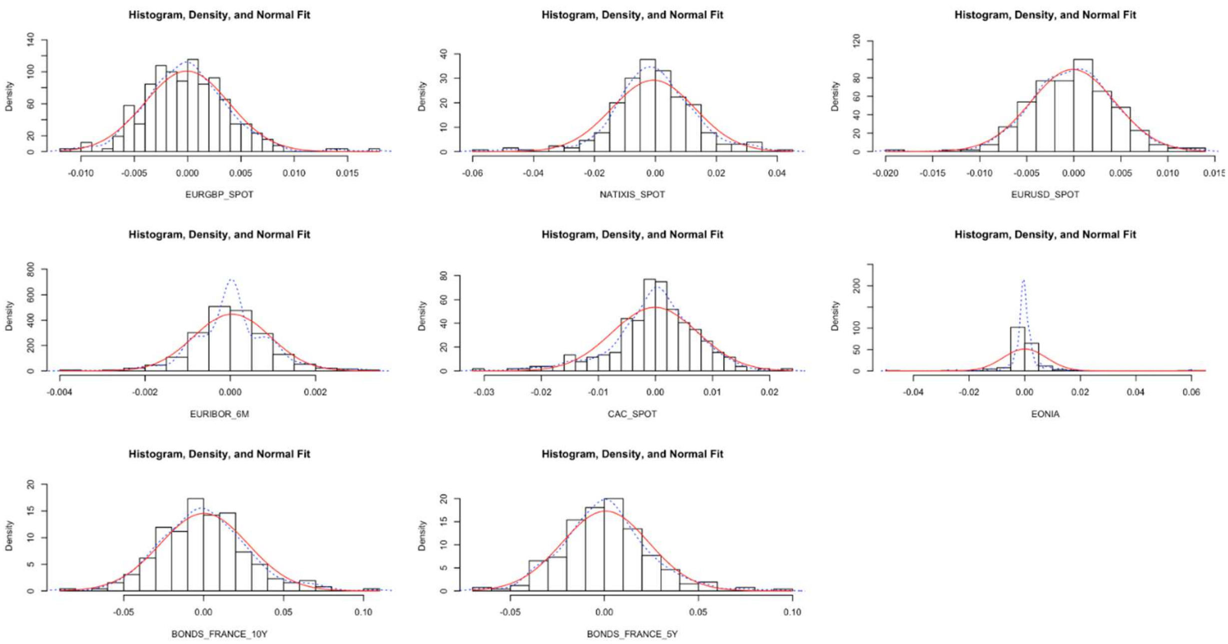
```
        Jarque Bera Test

data:  data_analysis
X-squared = 16.118, df = 2, p-value = 0.0003163
```

Le test ne passe pas du tout pour l'EUR-USD. Le test de Kolmogorov-Smirnov regarde les quantiles là où le test de Jarque-Bera regarde la forme de la courbe.

Important : la théorie financière n'émet que des hypothèses sur les données afin d'essayer de modéliser au mieux les informations. Les lois les plus utilisées sont choisies pour être des objets mathématiques simples à utiliser. Ces hypothèses ne sont pas forcément justifiées comme le montre les distributions empiriques vs loi normales estimées de différents sous-jacents financiers:

Voici la représentation graphique des histogrammes et des lois normales associées, de moyenne la moyenne empirique de la série-financière et d'écart-type l'écart-type empirique de la série :



En noir les histogrammes, en bleu la fonction de répartition de la loi des rendements de des séries-financières et en rouge les lois normales exprimées sur les paramètres de la série. En effectuant les différents tests sur les séries, nous obtenons :

Axis	p-value D	p-value JB
EURGBP_SPOT	0.18	0.00
NATIXIS_SPOT	0.32	0.00
EURUSD_SPOT	0.92	0.00
EURIBOR_6M	0.00	0.00

CAC_SPOT	0.05	0.00
EONIA	0.00	0.00
BONDS_FRANCE_10Y	0.60	0.00
BONDS_FRANCE_5Y	0.39	0.00

On en conclue que le test de Jarque-Bera est très restrictif, et que notre modélisation par des lois normales, hypothèse majeure de ce cours, n'est pas nécessairement la plus appropriée.

Nassim Taleb [4] fustige dans son ouvrage l'utilisation de loi à queue faible pour la quantification des risques de marchés, qui fonctionnent dans des conditions classiques de marché, mais sous-estiment largement les évènements rares.

X. Modélisation des rendements des facteurs de risques

Afin d'évaluer les risques financiers d'un portefeuille, nous devons évaluer les risques associés à chaque facteur de risque. Cependant ce qui nous intéresse dans notre portefeuille, ce sont les variations possibles de ses risques de marché. Afin de se doter d'un modèle prévisionnel, il faut pourvoir modéliser le future des séries temporelles par des variables aléatoires dont nous pouvons estimer une loi statistique. En effet il est possible d'associer une loi statistique (paramétrique ou historique) aux variations des paramètres de marché entre t et $t+1$.

Définition — Soit un processus temporel à valeurs réelles et en temps discret $Z_1, Z_2, \ldots, Z_t$. Il est dit stationnaire au sens fort si pour toute fonction f mesurable :

$$f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_t) \text{ et } f(Z_{1+k}, Z_{2+k}, \ldots, Z_{t+k})$$

ont même loi.

AJOUTER UN PARAPHRAPHE ICI POUR MONTRER QUE LES CAC N'EST PAS STATIONNAIRE MAIS QUE LES RENDEMENTS DU CAC SONT A PEU PRES STATIONNAIRES !

Deux modèles prévisionnels sont très utilisés en finance, pour leur facilité d'utilisation pratique et théorique.

Rendements absolus

On considère que les variations absolues de l'actif entre aujourd'hui et demain:

$$x_{t+1} = x_t + r_{t+1}^{absolute}$$

On peut donc réécrire le rendement ainsi :

$$r_{t+1}^{absolute} = x_{t+1} - x_t$$

Ici, ne s'agissant que d'une différence de niveau, l'unité des rendements est celle de la série utilisée. Si la différence est effectuée sur des taux en pourcent, alors les rendements sont en pourcent.

Rendements relatifs

On considère que le spot va monter ou baisser d'un certain pourcentage :

$$x_{t+1} = x_t\left(1 + r_{t+1}^{relative}\right)$$

Dans ce cadre, les rendements s'écrivent ainsi :

$$r_{t+1}^{relative} = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t}$$

Rendements logarithmiques

Les rendements logarithmiques décrivent les performances des actifs entre aujourd'hui et demain avec un modèle en exponentielle qui rappelle la diffusion de Black-Scholes, dont ce modèle de risque est inspiré.

$$x_{t+1} = x_t \cdot e^{r_{t+1}^{log}}$$

<u>Note</u> : cette équation n'est pas sans lien avec la diffusion de Black-Scholes, qui nous indique que le prix de l'actif à demain vu d'aujourd'hui est modélisé par l'équation suivante : $x_{t+1} = x_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{365} + \sigma \cdot B_{1/365}}$.

Dans ce cadre, les rendements se calculent ainsi :

$$r_{t+1}^{log} = \ln(x_{t+1}) - \ln(x_t) = \ln\left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right)$$

Lorsque l'on utilise les rendements logarithmiques, on s'intéresse donc aux variations relatives de l'actif x entre t et t+1 :

$$r_{t+1}^{relative} = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = \frac{x_t \cdot e^{r_{t+1}} - x_t}{x_t} = e^{r_{t+1}^{log}} - 1$$

On va parler de log rendement pour exprimer des variations relatives sur les actifs financiers.

<u>Note</u> : le développement limité de ce modèle à l'ordre 1 permet de retrouver la formule des rendements relatifs :

$$r_{t+1}^{log} = ln\left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right) \underset{dl1}{\longrightarrow} -1 + \frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = r_{t+1}^{relative}$$

Premières hypothèses de modélisation

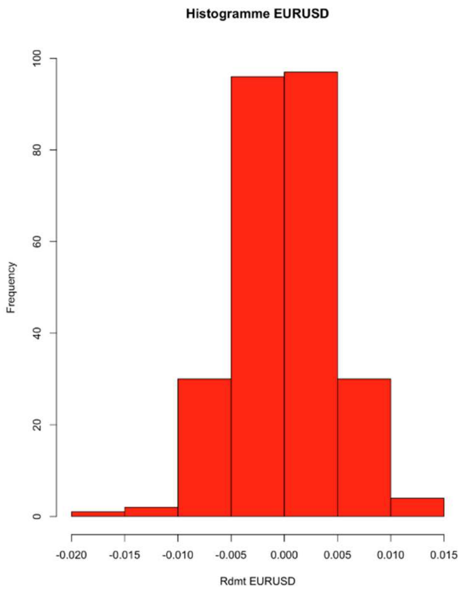
Une fois que l'on a choisi le type de rendements que l'on veut modéliser (ce choix se fait en fonction de la classe d'actif, le rendement des actions est modélisé par des variations logarithmiques, le rendement des taux par des variations relatives…), il faut choisir par quel type de variable aléatoire nous allons modéliser notre rendement.

Une **variable aléatoire** est une application définie sur l'ensemble des éventualités, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On va donc parler de réalisation d'une variable aléatoire pour les observations obtenues. En prenant l'exemple d'un dé à 6 faces, on a :

X la variable aléatoire du dé à 6 faces. L'ensemble des possibles est la liste des entiers entre 1 et 6. Chaque face à une chance de 1/6 d'apparaître lors d'un lancer (pour le cas d'un dé non pipé). En moyenne, on tombera sur 3.5 de valeur de dé moyenne, et sa variance est à 2.91 (soit un écart type à 1.7).

Dans le cadre de ce cours, on modélisera les rendements du CAC, les rendements du taux EUR/USD, etc… comme des réalisations d'une loi paramétrique. Les paramètres de la loi seront calibrés sur un historique de variations, en d'autres termes, les paramètres qui seront retenus sont ceux qui permettront d'accorder au mieux loi paramétrique et loi historique.

Ci-après l'histogramme des rendements logarithmiques du taux de change EUR/USD.



On souhaite définir sa loi, afin d'en déterminer ses estimateurs et sa modélisation pour l'utiliser dans nos calculs des risques. Pour rappel, une variable aléatoire X est définie par $P(X \in B) = P\left(F_X^{-1}(B)\right)$.

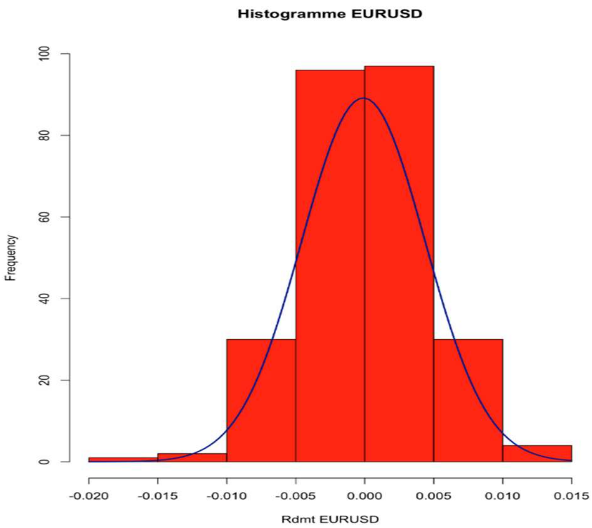
Dans notre cas, on peut dire que la probabilité d'occurrence d'un rendement inférieur à -0,015% (B dans la formule) sur la loi de EUR/USD est faible, de l'ordre de $\left(\frac{1}{260}\right)$ %.

Pour les variables continues, avec une probabilité donnée, trouver la valeur de la variable par la fonction de répartition :

$$F_X(x) = P(X < x)$$

Pour le taux EUR/USD, la probabilité d'avoir une valeur inférieure à -0.01% est de moins de 1%.

En superposant la loi normale adéquate (estimé sur l'échantillon), on obtient le graphique suivant :



Hypothèse de marché : définition et validations

Afin de calculer les métriques, nous allons nous doter des hypothèses suivantes :

- Les rendements de chaque variable de marché suivent une loi normale de loi $N(\mu, \sigma)$ avec μ la moyenne de la série et σ l'écart-type. Les paramètres sont estimés par les estimateurs sans biais usuels.
- Chaque rendement est indépendant de son précédent et il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage. Comme écrit dans la majorité des prospectus de finance : « les performances passées ne présagent pas des rendements futurs ».
- Les rendements disposent d'une variance donnée et égale pour l'ensemble des observations.
- Les rendements sont corrélés entre eux.

Avant de pouvoir définir des métriques de risques basés sur ces hypothèses de marché, il faut les valider sur les données et vérifier que l'on se n'écarte pas trop de la réalité. Pour ceci, on effectue des tests statistiques.

C. Principales métriques de Risque de Marché

Le prix MtM_t ou Mark-to-Market, correspond au prix d'évaluation d'un produit ou d'un portefeuille financier à un instant t.

XI. Les Greeks

La définition générale des greeks

Les greeks en finance sont un des outils de base du suivi des risques. Les produits du portefeuille sont sensibles à la variation des paramètres de marché qui compose sa valorisation. Dès qu'un paramètre bouge, le portefeuille bouge d'un facteur de ce mouvement.

Le delta

$$\Delta_S = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Avec V la valeur du portefeuille et S le prix du sous-jacent. Représente la sensibilité du prix du portefeuille en fonction de la variation du prix du sous-jacent. Pour connaître la variation du MtM en fonction des mouvements de S, il faut multiplier le delta par une variation absolue du sous-jacent S.

Cependant pour les Equity, les variations sont souvent exprimées en pourcent. Ainsi le delta se formule différemment :

$$\Delta_S = \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S$$

Dans ce contexte, la variation de MtM du portefeuille

Le Gamma

$$\Gamma_S = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial S^2}$$

Représente la sensibilité du prix du portefeuille en fonction de la variation du prix du delta. Cela représente une sensibilité d'ordre 2.

Le Vega

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

Représente la sensibilité du portefeuille en fonction de la variation à la volatilité, si elle est incluse dans le pricing du produit.

Le Vanna

$$\text{Vanna} = \frac{\partial \delta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \nu}{\partial S} = \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial S \partial \sigma}$$

Représente la sensibilité du prix du portefeuille en fonction de la variation du prix du sous-jacent ainsi que la volatilité. Cela représente une sensibilité d'ordre 2.

Le Volga

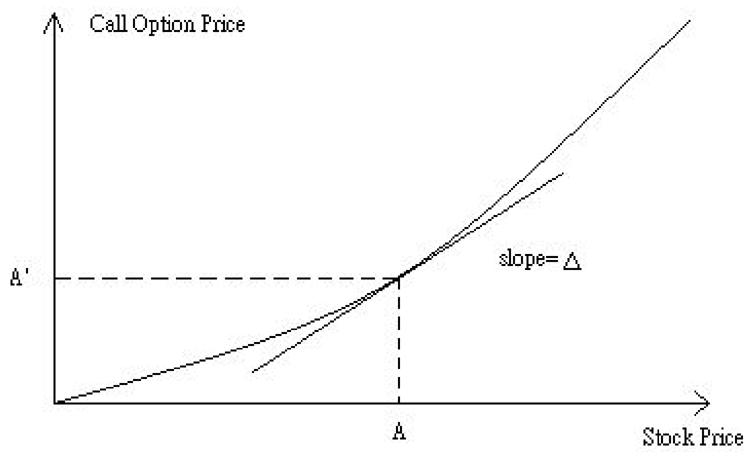
$$\text{Volga} = \frac{\partial \nu}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \sigma^2}$$

Bien d'autres Greeks existent : l'epsilon, le cega, le theta, le rho, la couleur…

Notons que les portefeuilles ne disposent pas de l'ensemble de ces sensibilités. Si un paramètre n'intervient pas dans la valorisation du portefeuille alors la Greek associée sera nulle.

L'approximation de la valeur d'un portefeuille

Soit la fonction suivante de la valeur d'un call en fonction du prix du sous-jacent



En A, on a le prix A' du portefeuille. Le delta représente la tangente à la droite. La tangente de la tangente représente le gamma. L'ensemble de ces dérivés permettent d'approximer la valeur du portefeuille en A.

On peut généraliser avec **l'approximation de Taylor.** Soit f la formule de valorisation du portefeuille ci-dessus : Pas soAnas

$$df = f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^2(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

avec a et x des éléments de R et $R_n(x)$ négligeable devant les termes d'avant (plus la dérivé est élevé, plus $R_n(x)$ est faible). Avec x=a+h, on a :

$$df = f(a+h) - f(a) = \frac{\partial \mathrm{f}_a}{\partial x} h + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \mathrm{f}_a}{\partial x^2} h^2 + \ldots + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^n \mathrm{f}_a}{\partial x^n} h^n + R_n(h)$$

En pratique, le choc du delta est souvent fixé à a=1% (dans la formule). Cette approximation peut être utilisée dans le cadre d'une fonction à plusieurs paramètres. Soit f(x,y) la valeur du portefeuille, avec la transformation x=a+h et y=b+k :

$$df = f(a+h, b+k) - f(a,b)$$

$$df = \frac{\partial \mathrm{f}_{(a,b)}}{\partial x} h + \frac{\partial \mathrm{f}_{(a,b)}}{\partial y} k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathrm{f}_{(a,b)}}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathrm{f}_{(a,b)}}{\partial y^2} k^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{f}_{(a,b)}}{\partial x \partial y} hk + R_n(h^2, k^2)$$

On additionne les dérivées des différents ordres pour converger vers la valeur du portefeuille.

En finance, la valeur h de la formule de taylor est dit **Choc** (δ), et vaut souvent par convention : x% du montant du spot, x% en absolu sur le vega, etc. Ce qui intéresse le risk manager est la variation de son portefeuille en fonction des variations des valeurs de marché. Avec la notation financière des deltas et autres métriques, on obtient, pour un produit composé de deux paramètres le spot S et la volatilité σ :

$$MtM(S_0 \cdot (1+\delta_S); \sigma_0 + \delta_\sigma) - MtM(S_0, \sigma_0)$$
$$\approx \Delta_S \cdot \frac{\delta_S}{S_0} + \frac{1}{2}\Gamma_S \left(\frac{\delta_S}{S_0}\right)^2 + \nu \cdot \delta_\sigma + \frac{1}{2}\text{Volga} \cdot \delta_\sigma^2 + Vanna \cdot \frac{\delta_S}{S_0} \cdot \delta_\sigma$$

Le Vanna est compté deux fois, car il s'agit d'inclure les deux parties de la matrice Hessienne :

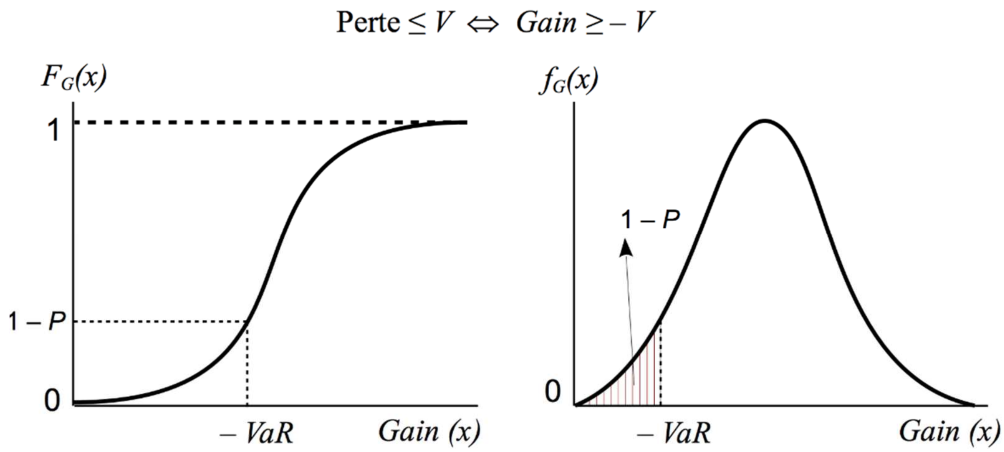
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$$

XII. La Value at Risk

La Value At Risk (VaR) est une métrique de risque indiquant, pour un **horizon de temps donné**, **la probabilité de perte maximal** qu'admet un portefeuille. Autrement dit :

$$P(Gain > -VaR) = \alpha \equiv P(Gain < -VaR) = 1 - \alpha$$

avec la partie « Gain » étant la répartition de mes rendements de mon portefeuille, et α la probabilité fixé par l'analyse. Graphiquement cela se représente par :



Autrement dit :

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F_X(x) > \alpha\} = F_Y^{-1}(1-\alpha)$$

Avec :

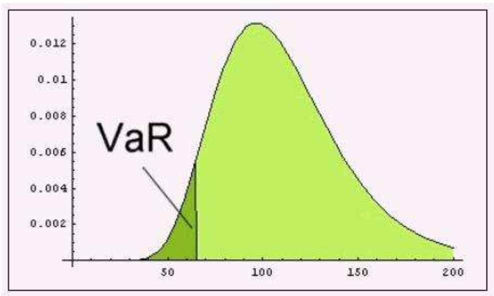
- F^{-1} la loi inverse de X, donnant une valeur sur X pour un quantile donné.
- α la probabilité d'apparition de notre VaR

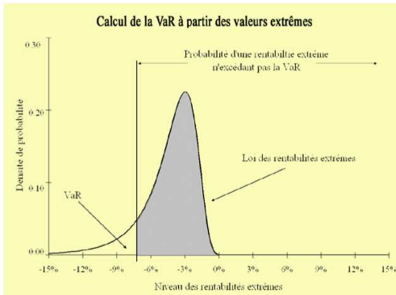
Comme vu auparavant, une des hypothèse de la finance émet que les rendements entre [0 ;T] du portefeuille sont des variables iid de la loi du portefeuille X. On a donc $V(X_N) = \sqrt{n} \cdot V(X)$.

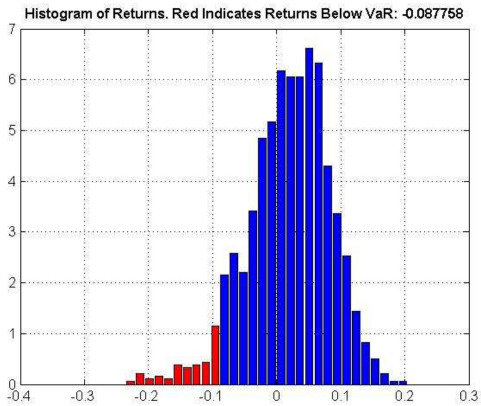
On va parler de VaR 1j quand les rendements observés sont calculés sur 1j. Pour une VaR 10j, il suffit de faire la différence $r_i = x_i - x_{i-10}$ (également valable pour les rendements relatifs). L'hypothèse que les rendements sont indépendants, issus de la même loi (i.i.d) permet d'affirmer que :

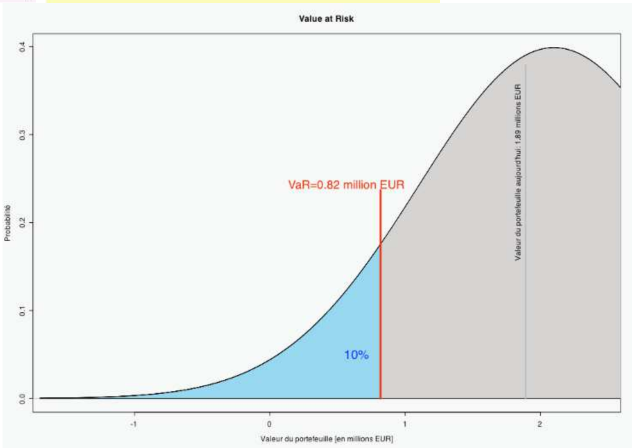
$$\boxed{VaR_\alpha(n\ jours) = \sqrt{n} * VaR_\alpha(1\ jour)}$$

La VaR est une valeur (exprimé en unité de ce qu'on représente) et peut être estimé soit sur des valeurs historiques, soit des simulations. On va donc observer l'occurrence de l'arrivée d'un élément de notre observation en s'intéressant aux queues de distribution de la loi. La VaR est applicable à n'importe quelle distribution, qu'elle soit normale, khi2, ou empirique. On peut donc avoir :









La VaR est une mesure de risque :

- Non sous-additive (inégalité de Cauchy-Schwarz, qui vaut qu'en finance l'ajout de 2 portefeuilles ne réduit pas nécessairement le risque de leur somme de VaR).
- Facile à analyser, et applicable à n'importe quel technique de mesure …
- …Mais ne prend en compte qu'une valeur dans la distribution, et non la queue de distribution complète.

On va donc s'intéressé à la l'Expected-Shortfall pour prendre en compte la distribution des queues de loi observée.

XIII. L'Expected-Shortfall

Soit l'Expected Shortfall (ES) défini comme :

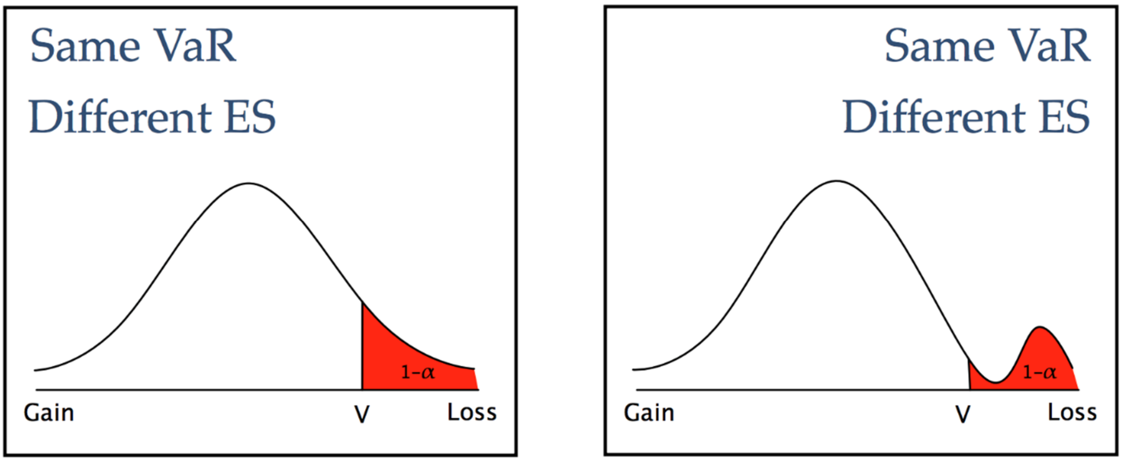
$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha} VaR_{1-b}(X)db$$

$$ES_\alpha(X) = E(X\ |X \geq VaR_\alpha(X))$$

Avec X la perte du portefeuille.

Cela représente l'air sous la courbe (la moyenne) pour les valeurs supérieures ou égales à la VaR. Elle permet de corriger 2 limites de la VaR :

- La prise en compte des queues de distributions (e.g. des pertes les plus importantes)
- Une mesure de risque cohérente entre portefeuille, e.g. l'ajout de position modifie l'ES proportionnellement (calcul de moyenne).



Méthode de calculs

Tout part de l'approximation de Taylor. Pour rappel on a, pour un produit à 2 paramètres :

$$MtM(S_0 \cdot (1+\delta_S); \sigma_0 + \delta_\sigma) - MtM(S_0, \sigma_0)$$
$$\approx \Delta_S \cdot \frac{\delta_S}{S_0} + \frac{1}{2}\Gamma_S\left(\frac{\delta_S}{S_0}\right)^2 + \nu \cdot \delta_\sigma + \frac{1}{2}\text{Volga} \cdot \delta_\sigma^2 + Vanna \cdot \frac{\delta_S}{S_0} \cdot \delta_\sigma$$

On va avoir comme méthode de calcul :

- **Pricing** : Soit l'utilisation de $MtM(S, \sigma)$, la formule de pricing. On choquera alors les paramètres par méthode de Monte-Carlo ou historique
- **Sensi** : Soit par l'utilisation de la partie en Greeks/sensibilités ($\Delta_S \cdot \frac{\delta_S}{S_0} + \frac{1}{2}\Gamma \cdot \frac{\delta_S}{S_0}^2$ ...) où les chocs sont en fonction des paramètres que l'on multiplie aux sensibilités. On va alors additionner les différentes parties pour avoir la valeur en t. Pour rappel, l'approximation en un point d'une fonction est :

$$f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^2(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

En posant $x = a + h$, on a :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial \mathrm{f}_a}{\partial x} h + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \mathrm{f}_a}{\partial x^2} h^2 + \ \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^n \mathrm{f}_a}{\partial x^n} h^n + R_n(h)$$

On peut donc définir le choc h comme issu de diverses distributions et a le choc infinitésimal en x.

La VaR paramétrique est la seule à n'être applicable qu'à du pricing Taylor, car on émet des hypothèses de modélisation sur les rendements directement. Dans la suite, nous ne ferons que la partie en sensibilité, car aucun pricer n'est facilement accessible pour ce cours.

La diversification de la VaR et le Hedge

A la vue de la formule en sensibilité du dessus, on remarque une conséquence directe que la VaR reflète. Soit :

$$MtM(S \cdot (1 + \delta_s), \sigma + \delta_\sigma) - MtM(S, \sigma) = \Delta_{\mathrm{S}} \cdot \delta_s + \nu \cdot \delta_\sigma$$

Pour un choc équivalent sur S et σ, si les sensibilités sont opposées, alors le montant de la VaR sera nulle. Cette effet sur les sensibilités s'appliquent aussi les chocs. On appelle cette effet **l'effet de diversification.**

« Diversification is protection against ignorance. It makes little sense if you know what you are doing. ».
Warren Buffet

Dans la réalité, un trader va **hedger/couvrir** son portefeuille en prenant des positions opposées sur ses produits en book où il souhaite faire disparaître un risque (exemple : delta neutre, gamma neutre etc.)

XIV. Les différents types de Value at Risk

VaR et ES historiques

Dans cette méthode, on va choquer les markets data directement au travers de la formule de taylor en sensi :

$$\Delta_{\mathrm{S}} \cdot \frac{\delta_S}{S_0} + \frac{1}{2}\Gamma_{\mathrm{S}} \cdot \left(\frac{\delta_S}{S_0}\right)^2 + \nu \cdot \delta_\sigma + \frac{1}{2}\mathrm{Volga} \cdot {\delta_\sigma}^2 + Vanna \cdot \frac{\delta_S}{S_0} \cdot \delta_\sigma$$

Avec Δ issu du choc infinitésimal de la valeur du portefeuille sur le paramètre spot, et δ_s le choc historique.

Sur la période choisie contenant **n jours** (exemple : pour 1an d'historique soit 260 jours ouvrés), on va appliquer à nos sensibilités les **n chocs** historiques de la période (les rendements centrés). On va avoir un vecteur de n valeurs (dit **vecteur de PnL**, Profit And Loss) qui représenteront la distribution du portefeuille. On applique alors la formule de la VaR en sélectionnant **le quantile** voulu dans cette loi.

Plusieurs choses à noter :

- Si un quantile tombe entre plusieurs réalisations dans une distribution, une interpolation linéaire est effectuée
- Pour la VaR n jours, on fait bien les rendements différencier entre T et T-n.
- L'approximation $VaR(n\ jours) = \sqrt{n} \cdot VaR(1\ jour)$ est toujours utilisée.

La VaR Historique est :

- Rapide et facile à calculer.
- Dépendante de la qualité des données.
- Sujet à des sauts brusques et peut être difficile à contrôler. Impact significativement les fonds propres.

L'expected shortfall n'est qu'une moyenne effectuée directement sur les PnL dépassant la VaR.

VaR et ES paramétriques

Hypothèses :

1) le actifs sont évalués avec un développement de Taylor à l'odre 1, c'est-à-dire qu'on ne prend pas en compte la convexité des actifs. Dans ce contexte, la variation approximative de valorisation du portefeuille s'écrit donc :
$$\Delta MtM \approx \sum_{i=1}^{\#RF\ normaux} \frac{\partial MtM}{\partial x_i} \cdot \delta x_i + \sum_{j=1}^{\#RF\ relatifs} \left(\frac{\partial MtM}{\partial x_j} \cdot x_j\right) \cdot \frac{\delta x_j}{x_j}$$
2) On considère que les rendements aléatoires, et suivent des lois normales centrées réduites. Comme détaillé au paragraphe sur les rendements, pour les facteurs de risque suivant des rendements normaux, on considère que la variation entre demain et aujourd'hui suit une loi normale. Pour les facteurs de risque dont les rendements sont modélisés par des variations relatives, ce sont les variations relatives qui sont modélisés par une loi normale. Ainsi :
$$\forall i, \Delta x_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$$
$$\forall j, \frac{\Delta x_j}{x_j} \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j)$$
3) Dans ce contexte, en utilisant les notations suivantes

$$S^T = \left[\frac{\partial MtM}{\partial x_1} \dots \frac{\partial MtM}{\partial x_I}, \left(\frac{\partial MtM}{\partial x_{I+1}} \cdot x_{I+1}\right) \dots \left(\frac{\partial MtM}{\partial x_{I+J}} \cdot x_{I+J}\right)\right] \textit{ la transposée du vecteur de sensi}$$

$$N = \begin{bmatrix} \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_1) \\ \dots \\ \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_N) \end{bmatrix} \textit{ une loi normale multivariée de matrice de corrélation } COR$$

$$\Delta MtM = t(S) \cdot N$$

Développement :

Théorème : la somme de de lois normales est une loi normale.

On cherche donc µ et σ tels que l'on puisse écrire $\Delta MtM = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

$$\mu = \mathbb{E}[\Delta MtM] = \mathbb{E}[t(S) \cdot N] = t(S) \cdot \mathbb{E}[N] = \sum s_i \cdot \mu_i$$

$$\sigma^2 = VAR[\Delta MtM] = \mathrm{VAR}[t(S) \cdot N] = \mathbb{E}[(t(S) \cdot N - \mathbb{E}[t(S) \cdot N]) \cdot t(t(S) \cdot N - \mathbb{E}[t(S) \cdot N])]$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[t(S) \cdot N \cdot t(N) \cdot S] = t(S) \cdot \mathbb{E}[N \cdot t(N)] \cdot S = t(S) \cdot \mathrm{COV} \cdot S$$

$$\sigma^2 = t(S) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dots} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot \mathrm{COR} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dots} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j S_i S_j \rho_{ij}$$

La transformation de la matrice de covariance en matrice de corrélation est détaillée au chapitre éponyme. Ainsi, la méthode paramétrique émet comme hypothèse :

$$\Delta MtM \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

On note Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$Z = \frac{\Delta MtM - \mu}{\sigma}$$

Résultats

On cherche donc VaR_α tel que :

$$P(\Delta MtM \leq VaR_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\Delta MtM - \mu}{\sigma} \leq \frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \alpha$$

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

Appliqué à un portefeuille à **n** actifs, disposant de sensibilité chacun, et sous forme discrète, la VaR paramétrique s'exprime :

$$VaR_\alpha(\Delta MtM) = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \mu_i + \phi_{1-\alpha}^{-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j S_i S_j \rho_{ij}}$$

Similairement, on peut calculer l'Expected-Shortfall ES_α

$$ES_\alpha(\Delta MtM) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(\Delta MtM) du$$

En réutilisant l'expression littérale de la VaR, nous pouvons développer ce résultat :

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 (\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(1-u))du$$

$$ES_\alpha = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \Phi^{-1}(1-u)du$$

Remarquons ici que si $X \sim N(\mu, \sigma)$ et $Y \sim N(0,1)$ alors$ES_\alpha(X) = \mu + \sigma * ES_\alpha(Y)$.

On utilise le changement de variable $u = \Phi(y) \mid y = \Phi^{-1}(u) \mid \frac{du}{dy} = \phi(y) =$

$$ES_\alpha = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\Phi^{-1}(1)} \Phi^{-1}\big(1-\Phi(y)\big)\phi(y)dy$$

$$ES_\alpha = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} \Phi^{-1}\big(\Phi(-y)\big)\phi(y)dy$$

$$ES_\alpha = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} -y\,\phi(y)dy$$

$$ES_\alpha = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} -y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$ES_\alpha = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{1}{2}y^2}\right]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty}$$

$$ES_\alpha = \mu - \frac{\sigma}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\Phi^{-1}(\alpha)^2}$$

$$\boxed{ES_\alpha = \mu - \sigma\cdot\frac{\phi\big(\Phi^{-1}(\alpha)\big)}{1-\alpha}}$$

Comparaison des ES et des VaR paramétriques pour un portefeuille similaire

En comparant les deux quantités suivantes, $-\frac{\phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{1-\alpha}$ et $\Phi^{-1}(1-\alpha)$, on peut établir la table suivante :

alpha	90%	95%	98%	99%	99.90%	99.99%
VaR	-1.28	-1.64	-2.05	-2.33	-3.09	-3.72
ES	-1.75	-2.06	-2.42	-2.67	-3.37	-3.96
Ratio	1.37	1.25	1.18	1.15	1.09	1.06

VaR et ES Monte-Carlo

La VaR Monte-Carlo s'inspire donc des méthodes de Monte-Carlo détaillées dans le cours d'introduction au calcul stochastique. La différence notable est que la quantité cherchée est non une espérance, mais un quantile à 99% par exemple. Les VaR et ES Monte-Carlo sont donc approchés en utilisant des procédés aléatoires.

En pricing, nous calculons une moyenne équipondérée de l'ensemble des simulations.

$$\widetilde{g_n} = \frac{1}{N}\sum_i g(x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} E[g(X)]$$

Dans le cas des méthodes de pricing, les x_i représente l'ensemble des simulations des actifs. En cours il a été vu la réconciliation des primes de Call européen à un seul actif et à taux déterministe. X était donc un scalaire représentant 10 000 simulations de prix à maturité. Cependant dans un modèle à taux stochastiques, il faut également diffuser les taux Zéro-Coupons, et ainsi X représenterait le taux ZC ET les Spot à maturité.

Dans le cadre de la VaR, nous calculerons simplement un quantile. En utilisant le théorème central, et en utilisant des procédés aléatoires, la méthode de Monte-Carlo indique qu'avec une simulation assez grande, **on converge la véritable valeur estimée par notre estimateur**. On va donc effectuer des tirages aléatoires de notre portefeuille avec un nombre de simulation n donné, et converger vers la valeur de la VaR.

$$\widetilde{VaR_{\alpha,n}} = \widetilde{F_n^{-1}}\,(g(x_i), 1-\alpha) = g\left(x_{\sigma(n\cdot(1-\alpha))}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} VaR_\alpha[g(X)]$$

Avec σ une fonction de permutation définie telle que $g(x_{\sigma(1)}) < \cdots < g(x_{\sigma(n)})$

Avec g une fonction d'évaluation des variations de P&L du portefeuille.

Pour une génération de 10 000 simulations Monte-Carlo et une VaR à 99%, la VaR correspond donc à la $100^{ème}$ pire perte (10 000 * 1% = 100) de notre vecteur de variation de Mark-to-Market.

Cependant les VaR et ES sont calculées à l'échelle d'une banque, et donc englobe l'intégralité des produits en portefeuille. Dans ce contexte, les x_i représentent l'intégralité des variations des axes de risques entre aujourd'hui et demain. Il n'est pas rare en production dans les banques que chaque vecteur x_i soit de dimension 15 000 (15 000 axes de risques) et que l'on simule 10 000 vecteurs (pour les 10 000 simulations de Monte-Carlo).

Similairement, nous calculerons pour les Expected-Shortfall, une intégrale de la queue de distribution empirique du Monte-Carlo :

$$\widetilde{g_n} = \frac{1}{n\cdot(1-\alpha)} \sum_{i\in[1;n\cdot(1-\alpha)]} g\left(x_{\sigma(i)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} ES[g(X)]$$

Pour une génération de 10 000 simulations Monte-Carlo et une VaR à 99%, l'ES correspond donc à la moyenne des 100 pires pertes de notre vecteur de variation de Mark-to-Market.

Dans le cadre de ce cours, nous partirons de l'hypothèse de normalité pour les variations absolues ou variations logarithmiques du prix des actifs. Lors du paragraphe sur la VaR paramétrique, nous avons vu l'importance cruciale de la corrélation des séries-financières dans la quantification du risque. Ainsi la génération Monte-Carlo des séries financières doit impérativement prendre en compte cette corrélation. Il est donc nécessaire de simuler les rendements de l'ensemble des actifs en portefeuille par une loi normale multivariée de matrice de covariance Σ :

$$R \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

Pour les lois log-normales (comme les prix des actions), ce sont les variations logarithmiques qui suivent des lois normales.

$$S_{T_0+1} = S_{T_0} e^{R_k} \mid R_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

Or les Greeks log-normales sont exprimées en variations relatives de sous-jacent. Il faut donc transformer les simulations des rendements normaux en simulations de variations relatives log-normales pour ces axes de risque.

$$\frac{S_{T_0+1} - S_{T_0}}{S_{T_0}} = e^{R_k} - 1$$

<u>Note</u> : un développement limité à l'odre 1 permet de retrouver R_k cependant.

Ainsi on génère le vecteur des variations attendues

$$X = t(R)$$

$$\begin{cases} t(x) = x \; pour \; actifs \; suivant \; des \; loi \; normales \\ t(x) = e^x - 1 \; pour \; les \; actifs \; suivant \; des \; lois \; log-normales \end{cases}$$

A la différence de la VaR paramétrique, cette technique de calcul peut prendre en compte les effets d'ordre 2, que ce soit par une full-revalorisation des trades ou bien par une méthode de Taylor.

En dernier lieu, quelques mots sur la fonction d'évaluation g :

- Soit nous utilisons la vraie fonction
  $$g = \Delta MtM : (x_1, x_2 \dots x_n) \to \Delta MtM(x_1, x_2 \dots x_n)$$
  qui donne les variations de Mark-to-Market du portefeuille de référence en fonction des variations (absolue ou relative) des sous-jacents.

- Soit nous utilisons la fonction de Taylor
  $$g = T_{MtM} : \left(\delta_1 \dots \delta_n, v_1 \dots v_n, \Gamma_{1<i,j<n}, x_1, x_2 \dots x_n\right) \to T_{MtM}(x_1, x_2 \dots x_n)$$
  qui donne une approximation des variations de Mark-to-Market du portefeuille, en fonction des variations (absolue ou relative) des sous-jacents d'une part, et des Greeks d'autre part.

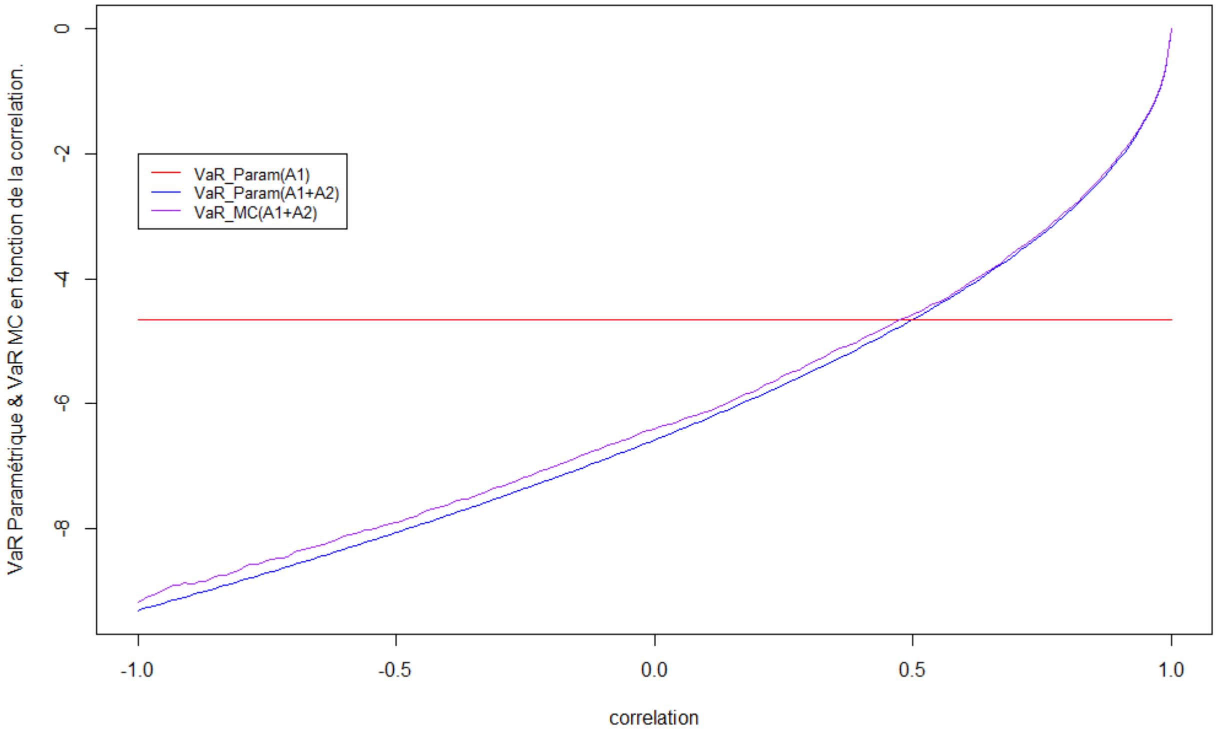
Conclusions et illustrations

Les Value at Risk et Expected Shortfall paramétriques sont très faciles à modéliser, mais…

- Entrainent une dépendance forte à l'hypothèse du modèle gaussien (ou à une autre loi paramétrique)
- Ne prennent en compte <u>uniquement</u> le premier ordre des sensibilités. Ainsi cette mesure ne convient pas à la gestion du risque de marché pour des portefeuilles contenant des options (et donc du gamma).

Il est à noter que l'effet de diversification intervient principalement sur la corrélation.

Pour un book donné avec sensibilité opposée (delta1 = -delta2 = 1) et écart-types égaux ($\sigma_1 = \sigma_2 = 2$, on a la forme suivante, en fonction de la corrélation. Si l'actif 1 et l'actif 2 sont parfaitement corrélés, alors l'actif 2 dont le delta est -1 couvre parfaitement les risques de l'actif 1 dont le delta est +1. C'est ce qu'on appelle une diversification parfaite.




```
Correl = seq(-1,1,0.01)
sd1 = 2
sd2 = 2
delta1 = 1
delta2 = -1

plot(Correl, - qnorm(0.99) * sqrt(delta1^2*sd1^2 + delta2^2*sd2^2 +
2*delta1*delta2*Correl* sd1*sd2), type ="l", col = "blue", xlab =
"correlation", ylab = "VaR Paramétrique & VaR MC en fonction de la
correlation.")
lines(Correl, - rep(qnorm(0.99) * sqrt(1^2*2^2), 201), col = "red")

N1 = rnorm(10000)
N2 = rnorm(10000)
W1 = sd1*N1
W2 = lapply(Correl, function(x) sd2*(x * N1 + sqrt(1-x^2) * N2))
VaRMC = unlist(lapply(W2, function(x) quantile(delta1 * W1 + delta2 * x,
0.01)))
lines(Correl, VaRMC, col="purple")

legend(-1, -2, legend=c("VaR_Param(A1)", "VaR_Param(A1+A2)", "VaR_MC(A1+A2)"),
col=c("red", "blue", "purple"), lty=1, cex=0.8)
```

A l'inverse, plus la corrélation est en territoire négatif, plus la VaR est élevé car on va annuler l'effet « diversifié » du portefeuille jusqu'à doubler le risque de l'actif 1 (niveau rouge).

XV. Les horizons de liquidité

Les rendements modélisés dans ce cours ne concernent que des horizons de liquidité à 1 jour. En effet de manière historique, la VaR correspond à la pire perte que l'on peut générer à horizon de 1 jour. Cependant toutes les prévisions ont été amplement dépassées pendant la dernière crise financière majeure. En effet lorsque l'ensemble des acteurs du système financier cherchent à se débarrasser d'un type de risques en même temps, il est difficile de trouver repreneur. Ainsi il faut également prendre en compte l'horizon de liquidité qui nous renseigne sur le nombre de de jours nécessaires pour pouvoir vendre un type de risque donné.

Une autre information importante nous est apportée par les crises économiques précédentes : il s'agit de savoir quelles sont les volatilités record des actifs en période de crise.

Horizons et liquidité et périodes de crises sont les bases sur lesquelles furent construites les mesures de risques qui sont en train d'être implémentées en banques de financements et d'investissements, aujourd'hui-même (et ce sur quoi les auteurs de ce cours sont en train de conduire leurs travaux).

D. Réglementation financière

I. Le calcul des fonds propres d'une Banque

Le régulateur impose un calcul journalier de la VaR, dans le cadre de Bâle 3.5. La VaR calculé, selon les 3 méthodes expliqués plus haut, est à effectuer sur :

- La période courante
- La période maximisant le montant de la VaR, dite **période stréssée**

Par convention

Si une banque n'est exposée qu'aux Equity, la période VaR stressée, (dit **SVaR**) sera probablement au alentour de 2008 (e.g. les chocs utilisées pour la générer).

Si une banque est exposée à des titres d'état européen, surtout grecque, alors la période de la SVaR sera plus vers 2011.

Cette obligation de SVaR est à revoir tous les 6mois à minima. Le régulateur impose aussi de calculer les fonds propres de la banque tout les 3 mois au travers de la formule suivante :

$$K = \sqrt{10} \cdot (\max(VaR_t; coef \cdot mean(VaR_{60j}) + (\max(SVaR_t; coef \cdot mean(SVaR_{60j}) + \theta$$

Avec :

- Coef = un coefficient donné par le régulateur en fonction de la qualité du modèle d'une banque. De 3 à 6.
- Θ un ensemble de métriques supplémentaire ne dépendant pas de la VaR (EEPE, IRC, CVA VaR …)

On a donc un impact de la VaR et de la SVaR directement dans la rentabilité de la banque.

Bâle au travers un historique des crises financières

Faire des recherches, des dessins, et une partie.

➔ On va focus sur risque de marché

II. Evolution de la législation financière

De Bâle 1 à 4

Le comité de Bâle rassemble les banquiers centraux de 60 pays via la Banque des Règlements Internationaux, est en charge de veiller au renforcement et à la stabilité du système financier depuis 1974. Le cadre réglementaire proposé évolue au gré du contexte économique et des crises financières traversées depuis.

Prudentiel : se dit d'un règle ou d'un ratio imposant aux banques d'avoir un minimum de fonds propres par rapports aux crédits qu'elles accordent. Etymologie : fondé sur la prudence.

1988, les accords de Bâle 1 et le ratio de Cooke.

Cependant cette première mouture ne concerne que le risque de Crédit, et non le risque de marché, ni le risque opérationnel.

L'apparition d'un marché très actif de produits dérivés et structurés dans les années 1990 a nécessité une refonte complète de ces accords afin d'y inclure le risque de marché qui devenait suffisamment important pour ne pas être mis à l'index réglementaire.

Les accords de Bâle 1 introduisent les premiers principes règlementaires du ratio de solvabilité. Ce ratio s'appelle le ratio de Cooke. Le ratio de Cooke est à 8% des emplois pondérés, dont la moitié des actifs doivent être des fonds propres Tiers 1, et l'autre moitié répartie entre des fonds propres Tiers 2 et Tiers 3. En d'autres termes, il est demandé aux institutions financières d'avoir 8% des encours de crédit en fonds propres.

Notation		AAA à AA-	A+ à A-	BBB+ à BBB-	BB+ à BB-	B+ à B-	Inférieur à B-	Non noté
États		0 %	20 %	50 %	100 %	100 %	150 %	100 %
Banques	Option 1	20 %	50 %	100 %	100 %	100 %	150 %	100 %
	Option 2	20 %	50 %	50 %	100 %	100 %	150 %	50 %
Entreprises		20 %	50 %	100 %	100 %	150 %	150 %	100 %
Parts de titrisations		20 %	50 %	100 %	150 %	Déduction des fonds propres		

Méthode de calcul des RWA (Risk Weighted Assets) en méthode Internal Ratings-Based Approach (IRB)

Cependant cette première mouture ne concerne que le risque de Crédit, et non le risque de marché, ni le risque opérationnel.

2004, les accords de Bâle 2 : définition des 3 piliers prudentiels et calcul de risque de marché

L'apparition d'un marché très actif de produits dérivés et structurés dans les années 1990 a nécessité une refonte complète de ces accords afin d'y inclure le risque de marché qui devenait suffisamment important pour ne pas être mis à l'index réglementaire.

Piliers 1 : calcul des exigences minimales de fonds propres, pour les risques de crédit, les risques de marché et les risques opérationnels. Le ratio de Cooke est remplacé par le ratio de McDonough dont le niveau reste à 8% des emplois pondérées, mais en prenant en compte ces trois risques financiers.

- Les méthodologies pour calculer les RWA crédits peuvent désormais être calculer par méthode interne prenant en compte le rating de la contrepartie auquel est associé une probabilité de défaut PD, l'encours du crédit N, et le taux de perte en cas de défaut en fonction des clauses du crédit, le Loss Given Default (LGD). Il est alors possible de calculer des VaR en simulant par Monte-Carlo des défauts et des LGD différentes, en tenant compte des matrices de passage développées par *Moody Analytics* et des variations au cours du temps des probabilités de défaut.
- Le risque de marché est calculé par la méthode DVG (delta, vega, gamma).
- Le risque opérationnel est également modélisé selon des normes internes.

Risques de marché et risques opérationnels sont calculées par des VaR 1d directement assimilables à des montant fonds-propres. Il faut donc multiplier par 1/8% = 12.5 pour retrouver des équivalents RWA Marchés et RWA RiskOp.

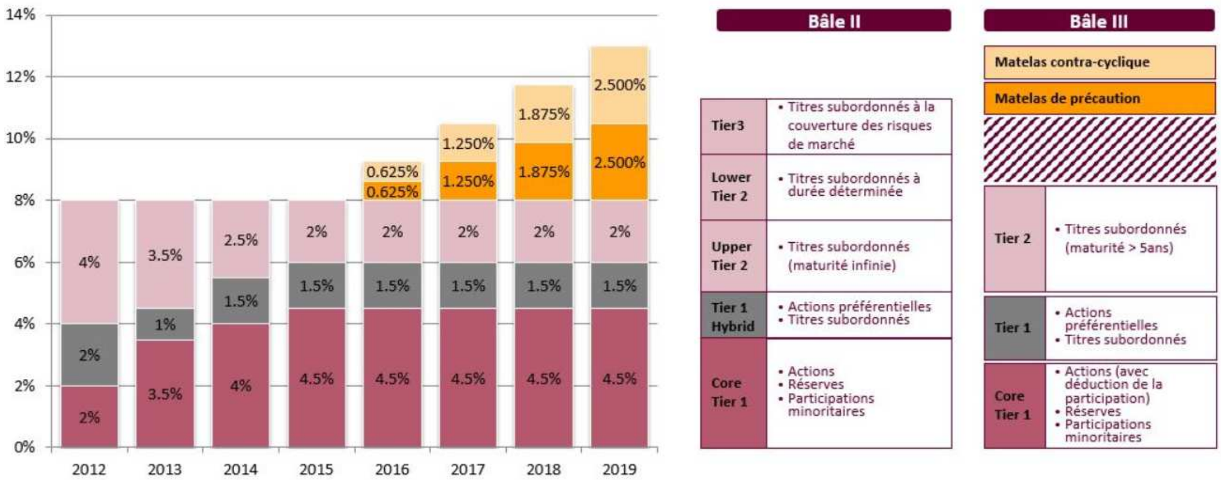
Piliers 2 : renforcement de la surveillance prudentielle par les superviseurs nationaux, mise en place d'audit prudentiels, et appréhender les risques non évalués par le pilier 1.

Piliers 3 : amélioration de la communication financière, promouvoir la solidité financière des banques par une communication transparente, mise en place de benchmarks inter-banques sur la qualité des processus et des outils de pilotage interne.

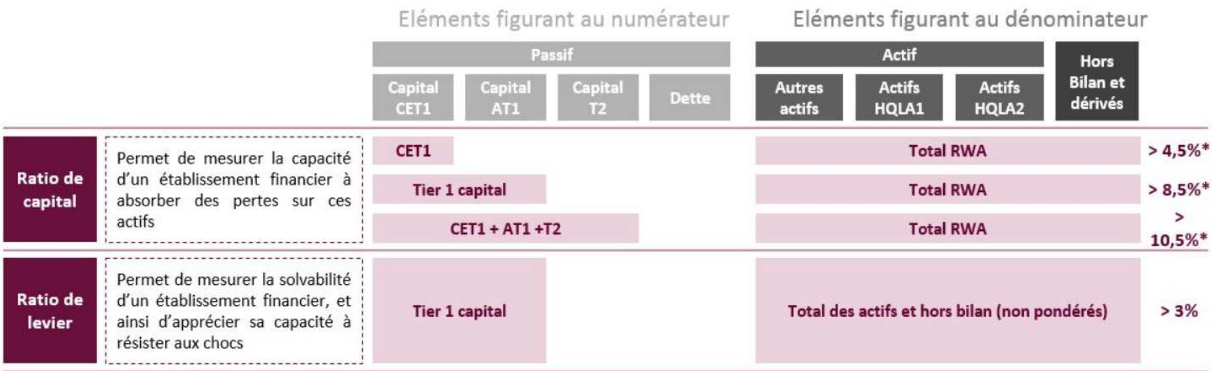
2013, les accords de Bâle 3 en réponse à la crise de 2008

La crise de 2008 a affecté les banques et l'économie réelle. Le principal challenge prudentiel est alors d'éviter les effets de propagation des crises locales.

Ainsi le ratio de solvabilité est élevé de 8% à 10,5%, et les exigences de chaque Tiers redéfinies, avec la mise en place d'un plan d'action échelonné sur 8 ans. Le matelas de précaution doit être composé de fonds propres de qualité Tiers 1 également.



Plan de consolidation des ratios prudentiels entre 2012 et 2020.



Ratios Bâle 3 cible

Des ratios de liquidité[1] sont également définis, Liquidity Coverage Ratio (LCR) et le Net Funding Stable Ratio (NSFR).

Le ratio de levier[2] permet quant à lui d'encadrer la taille du bilan des banques.

---

[1] https://www.bis.org/publ/bcbs238_fr.pdf
[2] https://www.bis.org/publ/bcbs270_fr.pdf

Ces accords ont entrainés une faramineuse demande en fonds propres, générant un énorme besoin en capital.

Les accords de Bâle 4 : Fundamental Review of the Trading Books[3]

Revue du risque de crédit :

- Revue des méthodes IRBA.

Revue du risque de marché :

- Obligation de calcul d'une méthode standard définie par le régulateur pour les risques de marché (d'inspiration DVG) – méthode SA *standard approcah*, en opposition à la méthode IMA *internal model approach*.
- **Prise en compte des vrais horizons de liquidité et calcul d'Expected-Shortfall en lieu et place des VaR dans les méthodes IMA.**

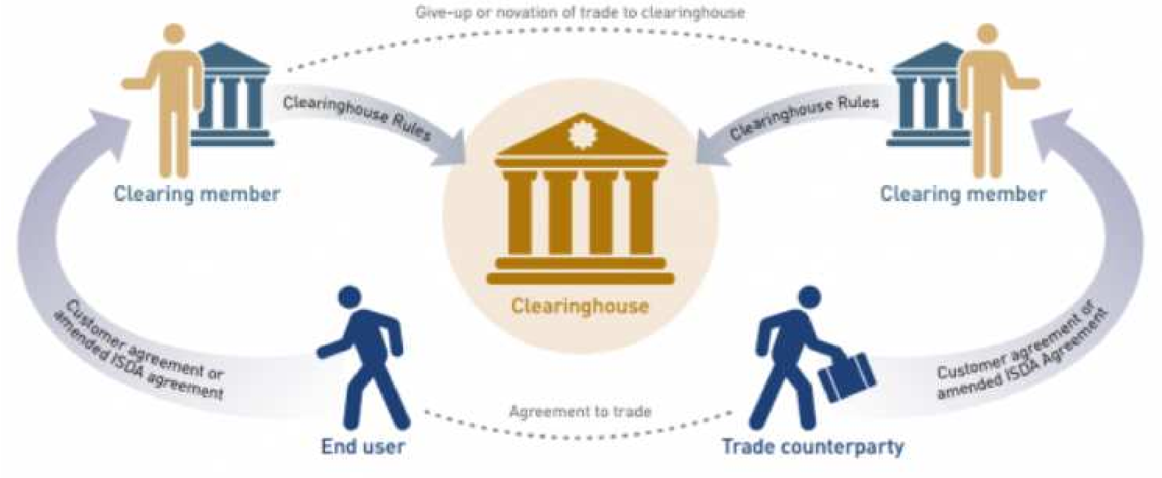
D'un point de vue d'une Expected-Shortfall, cela revient à calibrer les écarts-types sur des périodes de 10, 20, 60, 120 et 250 jours pour les actifs.

Risk factor category	10 days	20 days	60 days	120 days	250 days
Interest rate		X			
Interest rate ATM volatility			X		
Interest rate (other)			X		
Credit spread – sovereign (IG)		X			
Credit spread – sovereign (HY)			X		
Credit spread – corporate (IG)			X		
Credit spread – corporate (HY)				X	
Credit spread – structured (cash and CDS)					X
Credit (other)					X
Equity price (large cap)	X				
Equity price (small cap)		X			
Equity price (large cap) ATM volatility		X			
Equity price (small cap) ATM volatility				X	
Equity (other)				X	
FX rate		X			
FX ATM volatility			X		
FX (other)			X		
Energy price		X			
Precious metal price		X			
Other commodities price			X		
Energy price ATM volatility			X		
Precious metal price ATM volatility			X		
Other commodities price ATM volatility				X	
Commodity (other)				X	

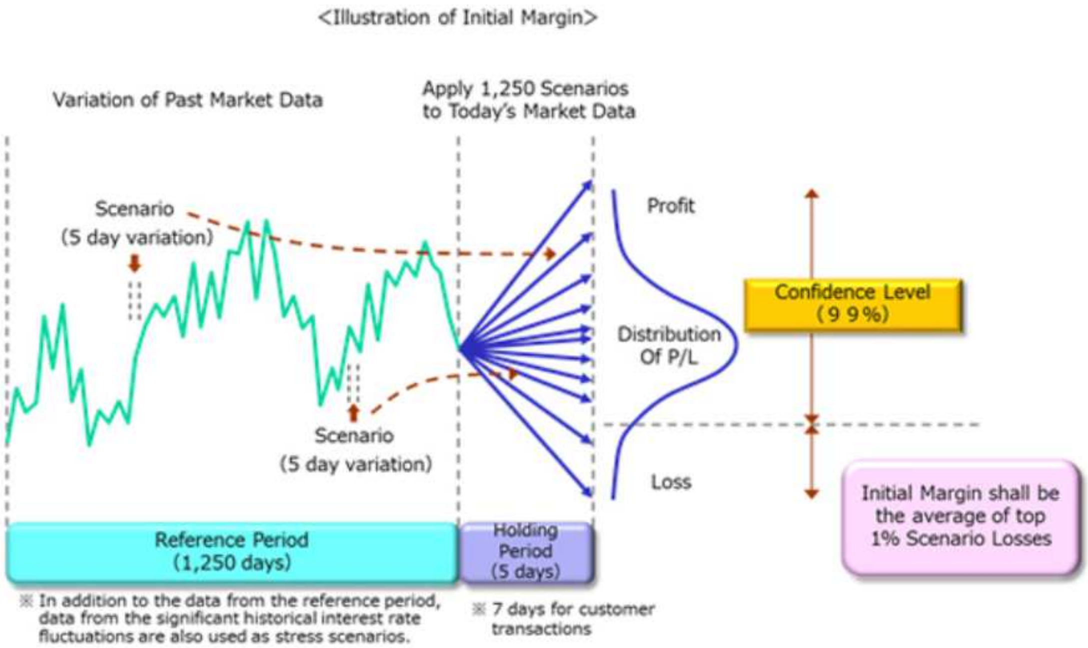
[3] https://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf

III. La compensation pour diminuer les risques de marchés

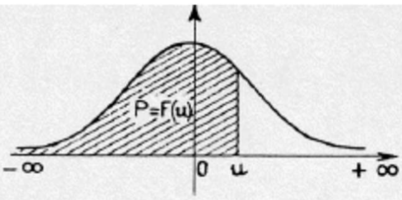
Central Counterparty Clearing Houses



EMIR, Initial Margins et Valuation Margins pour les dérivées non-clearés.



E. Valeurs de la fonction cumulative de la loi normale



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

F. Annexe sur les greeks

A FAIRE…

- ➔ Delta sur Future et expliquer pourquoi on appelle ce genre de produit du Delta_1.
- ➔ Vega sur un Future est nul, vega sur une option n'est pas nul
- ➔ Delta sur une option

Comparer pour une option européenne la spot-vol en full repricing avec une matrice spot-vol en approche en sensi.

G. Lexique franco-anglais

Anglais	Français
ECB (European Central Bank)	BCE (Banque Centrale Européenne
CCP – Central Counterpart Clearing House	Chambre de Compensation
Retail banking	Banque de détail, de proximité
Investment and Corporate Banking	Banque de Financement et d'Investissement
Asset-Management	Gestion d'actif
Private banking	Banque privée
Leverage Buy-Out (LBO)	Achat à effet de levier
Over The Counter (OTC)	Gré-à-gré
Own Funds Requirements (OFR)	Exigences en fonds propres (EFP)
Standard deviation / stdev	Ecart-type / ET

Bibliographie

[1] «French Hedge Funds study,» [En ligne]. Available: http://docs.preqin.com/reports/Preqin-Hedge-Funds-France-October-2015.pdf .

[2] «ISDA_SIMM,» [En ligne]. Available: https://www.isda.org/a/cgDDE/simm-for-non-cleared-20131210.pdf.

[3] Hull, Options, Futures and other derivatives.

[4] N. Taleb, Black Swan.